

2025 年度 複素関数論 I (担当: 松澤 寛) 自己チェックシート No.7

学科 (コース)・プログラム _____ 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. 複素平面上の曲線 $C: z(t) = x(t) + iy(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) が滑らかであることの定義を述べよ. 曲線の向きとは? また, なめらかな曲線の長さはどのように計算しますか?
2. 複素平面上の曲線 $C: z(t) = x(t) + iy(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) に対して $-C$ とは何ですか?
3. $U(t), V(t)$ が $[\alpha, \beta]$ で連続であるとする. $c = a + bi \in \mathbb{C}$ を定数とするとき

$$c \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} cF(t) dt$$

を確かめよ.

4. f が領域 D で連続, $C: z = z(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は D の滑らかな曲線であるとする. このとき複素積分 $\int_C f(z) dz$ の定義を述べよ.
5. 複素平面における単純閉曲線とは何ですか? また単純閉曲線の正の向きとはどのように定めますか?
6. 講義中述べた複素積分の評価式を述べよ (該当する命題を資料から探し, 書きなさい. 関数や曲線の仮定, 定数の説明も忘れずに).
7. 次の複素積分を計算しなさい. 曲線についてもパラメータ表示と図の両方を書きなさい.

(1) $\int_C \bar{z} dz$ C : 原点中心, 半径 1 の円

(2) $\int_C z^2 dz$ C : 0 と $1+i$ を結ぶ線分, 向きは 0 から $1+i$ へ向かう向き

(3) $\int_C \operatorname{Im} z dz$ C : 0 から $1+i$, $1+i$ から i , i から 0 に至る三角形の周

(Hint: (3) 三角形のそれぞれの辺を C_1, C_2, C_3 として別々に計算して曲線の和に関する複素積分の公式を用いよ.)

8. $a \in \mathbb{C}, r > 0$ とし, C を中心 a , 半径 1 の円とする.

(1) $C: z = z(t)$ とするとき $z(t)$ を書きなさい (三角関数を用いよ).

(2) $\operatorname{Re}(z(t) - a)$ を書きなさい.

(3) $\int_C \operatorname{Re}(z - a) dz$ を求めよ.