

2025 年度 複素関数論 I (担当: 松澤 寛) 自己チェックシート No.3

学科 (コース)・プログラム _____ 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. $\alpha \in \mathbb{C}$ の除外近傍とは何か. また, α の除外近傍で定義された複素関数 $f(z)$ に対して $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = A$ であることの厳密な定義を書きなさい.
2. $D \subset \mathbb{C}$ で定義された複素関数 $f(z)$ を考える. $\alpha \in \partial D$ であるとき, $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = A$ であることの厳密な定義を述べよ.
3. $f(z)$ を $D \subset \mathbb{C}$ で定義された関数とする. このとき $\alpha \in D$ で $f(z)$ が連続であることの厳密な定義を述べよ.
4. $f(z)$ を $D \subset \mathbb{C}$ で定義された関数とする. このとき $\alpha \in D$ で $f(z)$ が連続であることの必要十分条件を複素数列を用いて述べよ.
5. $D \subset \mathbb{C}$ で定義された関数 $f(z)$ が有界であるとは?
6. $D \subset \mathbb{C}$ で定義された関数 $f(z)$ に対して $|f(z)|$ が $\alpha \in D$ で最大値をとるとは?
7. 授業で扱った $|f(z)|$ の最大値に関する定理を述べよ.
8. 関数 $f(z) = z^2$ を考える. $w = f(z) = z^2$ を z -平面から w -平面への写像と考えることができる. 以下の問に答えよ.
 - (1) 実軸正の部分となす角が $\frac{\pi}{3}$ であるような半直線を L とするとき $f(L)$ を求めよ ($L: z = r(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ ($r \geq 0$) と表される.)
 - (2) 中心 O , 半径 2 の円を C とするとき $f(C)$ を求めよ ($C: z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) と表される.)
9. $z \neq 0$ で定義された関数 $f(z) = 1/z$ を考える. $w = f(z) = 1/z$ を z -平面から w -平面への写像と考えることができる. 以下の問に答えよ.
 - (1) $w = u + vi$, $z = x + yi$ とおくとき, $w = 1/z$ の関係式から u, v をそれぞれ x, y の式で表せ (例題 1 を参考にせよ).
 - (2) $S_1 = \{x \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ ($r > 0$) のとき $f(S_1)$ を求めたい. S_1 は $x^2 + y^2 = r^2$ と表されることに注意して, (1) を用いて x, y を u, v の式で表し, $x^2 + y^2 = r^2$ に注意して u, v の関係式を導け. このことから $f(S_1)$ は w -平面のどのような図形といえるか. S_1 を z -平面に $f(S_1)$ を w -平面に図示せよ.
 - (3) $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = a\}$ ($a > 0$) に対して $f(S_2)$ を求めよ (例題 1 をまねればよい). S_2 を z -平面に $f(S_2)$ を w -平面に図示せよ.