

2025 年度 複素関数論 I (担当: 松澤 寛) 自己チェックシート No.2

学科 (コース)・プログラム _____ 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. 中心 $z \in \mathbb{C}$, 半径 r の開円板とは何か.
2. $A \subset \mathbb{C}$ とする. z が A の内点, 外点, 境界点であることの定義を述べよ.
3. $A \subset \mathbb{C}$ の内部, 閉包とは何か.
4. $A \subset \mathbb{C}$ が開集合であること, 閉集合であることの定義を述べよ.
5. 中心 $z \in \mathbb{C}$, 半径 r の開円板は開集合であることを証明せよ.
6. $A \subset \mathbb{C}$ が有界であること, コンパクト集合であることの定義を述べよ.
7. $A \subset \mathbb{C}$ がコンパクト集合であることの必要十分条件を開被覆を用いて述べよ.
8. $A \subset \mathbb{C}$ が弧状連結であること, 領域であることの定義を述べよ.
9. 次の集合を図示し, 領域であるか述べよ.
 - (1) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$
 - (2) $\{z \in \mathbb{C} : \pi/3 < \arg z < \pi/2\}$ ただし $\arg z$ は $0 \leq \arg z < 2\pi$ とする.
 - (3) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < (\operatorname{Im} z)^2 < 4\}$
10. 複素数の数列 $\{z_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束することの厳密な定義を述べよ.
11. $A \subset \mathbb{C}$ ($A \neq \emptyset$) がコンパクト集合であることの必要十分条件を複素数列を用いて述べよ.
12. 複素数列 $\{z_n\}$ からなる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束することの定義を述べよ.
13. 級数 $\frac{\cos \theta}{3} + \frac{\cos 2\theta}{3^2} + \cdots + \frac{\cos n\theta}{3^n} + \cdots$ について以下の問いに答えよ.
 - (1) 級数は収束することを示せ (Hint: 公比をチェック)
 - (2) $|z| < 1$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$ であることを用いて
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{3} \right)^n$$
は収束することを示し, 和を求めよ.
 - (3) 最初に与えられた級数の和を求めよ.