

No.11 変数変換

まとめ 1 (変数変換とは)

- 変数 x, y と変数 u, v が関係

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

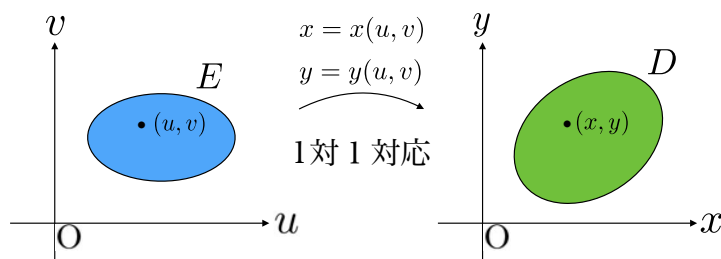
古い変数 = 新しい変数の式

..... ①

によって対応づけられているとき、この関係を**変数変換**という。

- 変数変換①により、 uv 平面の点を 1 つ決めると xy 平面の点がただ 1 つ定まる。
- 次の仮定をする：

uv 平面の有界閉領域 E と xy 平面の有界閉領域 D が①により 1 対 1 対応する。



1 対 1 対応とは

- どんな $(x, y) \in D$ に対しても $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ となる $(u, v) \in E$ が存在する (全射)。
- $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in E$ が

$$(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \Rightarrow (x(u_1, v_1), y(u_1, v_1)) \neq (x(u_2, v_2), y(u_2, v_2))$$

が成り立つ (単射)。

- このとき D で定義された関数 $f(x, y)$ は変数変換①によって E で定義された (u, v) の関数となる：

$$f(x(u, v), y(u, v)) \quad (u, v) \in E$$

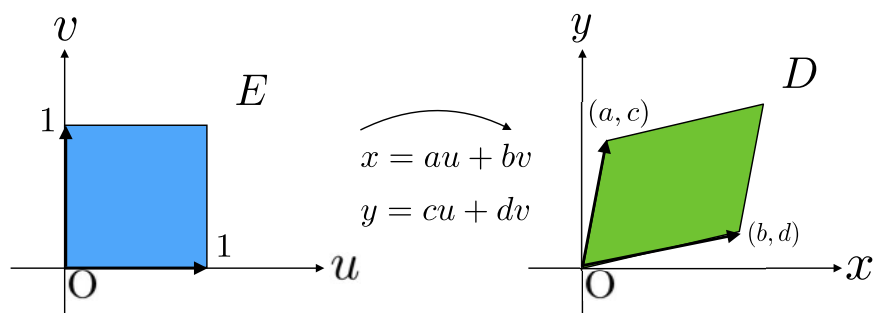
まとめ 2 (変数変換の例)

(1) 1 次変換

$$x = au + bv$$

$$y = cu + dv$$

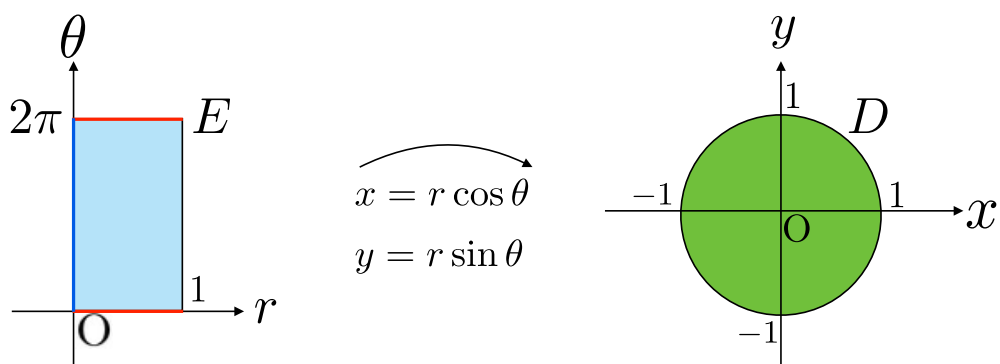
は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則, つまり $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ のとき 1 対 1 対応となる.



(2) 極座標変換

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

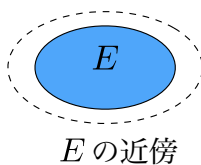


(厳密には 1 対 1 ではないが積分には影響しない.)

まとめ 3 (変数変換の公式)

- 変数変換 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ により uv 平面の有界閉領域 E と xy 平面の有界閉領域 D が 1 対 1 に対応しているとする.
- $x(u, v), y(u, v)$ は E を含むある開集合で C^1 級であり

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{ヤコビアン})$$



とする.

- このとき E が面積確定なら D も面積確定で D 上積分可能な関数 $f(x, y)$ に対して

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

($|J|$ はヤコビアンの絶対値であることに注意)

まとめ 4 (極座標変換の場合)

xy 平面の領域 D は極座標変換により $r\theta$ 平面の領域 E と対応しているとする. このとき

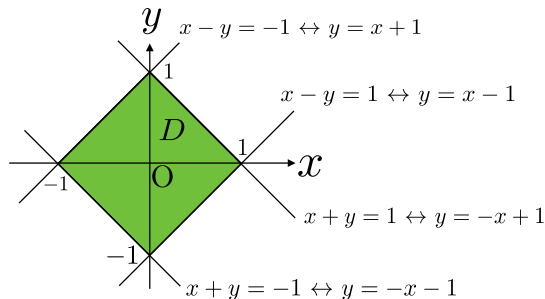
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(r \cos \theta, r \sin \theta) \color{red}{r} dr d\theta$$

演習 1

$D = \{(x, y) | -1 \leq x + y \leq 1, -1 \leq x - y \leq 1\}$ のとき

$$\iint_D \sqrt{x + y + 1} dx dy$$

を求めよ.

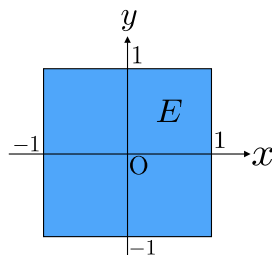


解

- $x + y = u, x - y = v$ とおくと D は

$$E = \{(u, v) | -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$$

である.



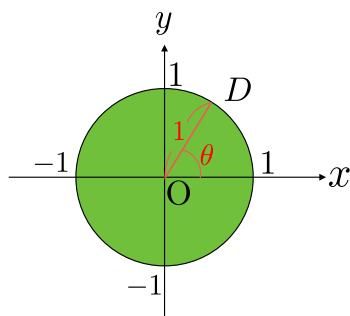
- また $x + y = u, -y = v$ より $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v) \\ y = \frac{1}{2}(u - v) \end{cases}$ (本来の変数変換の形) で

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x + y + 1} dx dy &= \iint_E \sqrt{u + 1} |J| du dv = \iint_E \sqrt{u + 1} \left| -\frac{1}{2} \right| du dv \\ &= \iint_E \sqrt{u + 1} \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{u + 1} du \right\} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{2}{3} (u + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_{u=-1}^{u=1} dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} dv = \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \sqrt{2} \end{aligned}$$

演習 2

$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ とするとき $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ を求めよ.



解 極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ により D に対応する $r\theta$ -平面の領域 E は

$$E = \{(x, y) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\} \quad (\leq 2\pi \text{でも OK})$$

したがって

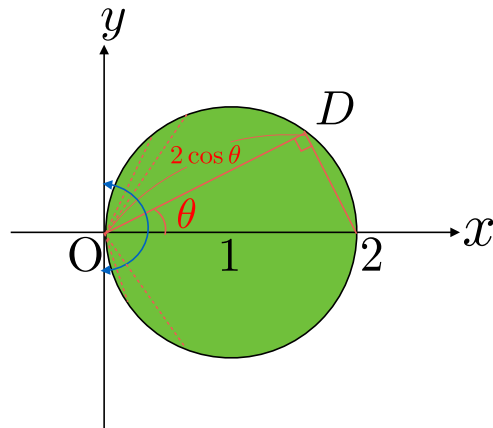
$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_E \sqrt{r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 r^2 dr \right\} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} d\theta = \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

演習 3

$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$ のとき $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$ を求めよ.

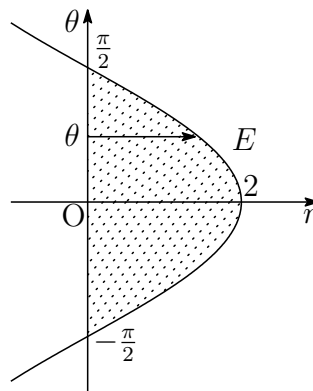
解

- $x^2 + y^2 \leq 2x$ を変形すると $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ なので領域 D は円 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ とその内部である.



- 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ によって D は $r\theta$ -平面の領域

$$E = \left\{ (r, \theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta \right\}$$



となる.

- $\sqrt{4 - x^2 - y^2} = \sqrt{4 - r^2}$ より

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy &= \iint_E \sqrt{4 - r^2} r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \int_0^{2 \cos \theta} \sqrt{4 - r^2} r dr \right\} d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^{2 \cos \theta} \sqrt{4 - r^2} (2r) dr \right\} d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (4 - r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{r=2 \cos \theta} \right\} d\theta \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}4 - 4 \cos^2 \theta &= 4(1 - \cos^2 \theta) = 4 \sin^2 \theta \\(4 - \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} &= 8 |\sin^3 \theta| \quad (\textcolor{red}{a^2})^{\frac{3}{2}} = (\textcolor{red}{\sqrt{a^2}})^3 = |a|^3 = |a^3|\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{3} (8 |\sin^3 \theta| - 8) \right\} \right] d\theta \\&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} (1 - |\sin^3 \theta|) d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta \\&= \frac{16}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3} \pi - \frac{32}{9}\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ は偶数}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

を用いた.