2025 年度　解析 III 演習（担当：松澤　寛）　レジメ

No.8・9　2 重積分

まとめ 1（長方形上の 2 重積分の定義）

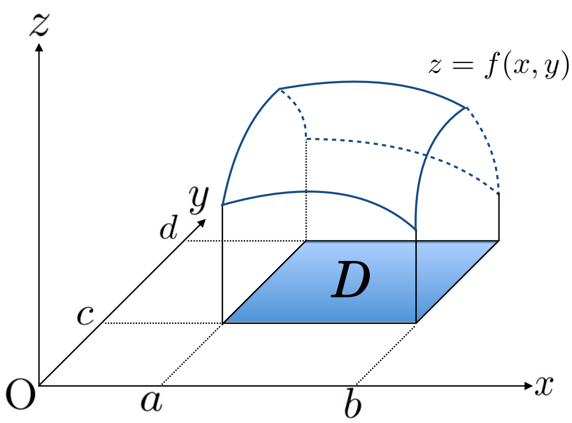
- D を各辺が座標軸に平行な閉長方形とする：

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) | a \le x \le b,\ c \le y \le d\} \\ &= [a,b] \times [c,d] \text{ とかく} \end{aligned}$$

- D で定義された有界な関数 $f(x,y)$ つまり，ある定数 M が存在して

$$|f(x,y)| \le M \quad ((x,y) \in D)$$

　を満たすを考える．



（$f(x,y) \ge 0$ のとき，曲面 $z = f(x,y)$ と長方形 D の間の立体を考えている．）

- $[a,b]$ を m 個，$[c,d]$ を n 個の小区間に分割し，その分割を Δ とする：

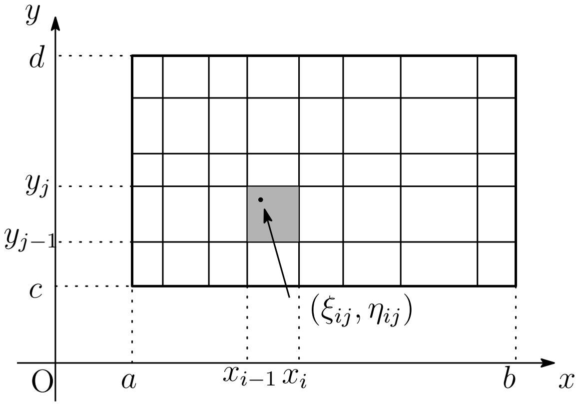
$$\Delta : \begin{array}{l} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d \end{array}$$

　この分割に対し

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \{(x,y) | x_{i-1} \le x \le x_i,\ \ y_{j-1} \le y \le y_j\} \\ &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n) \\ \Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \cdots, m) \\ \Delta y_j &= y_j - y_{j-1} \quad (j = 1, \cdots, n) \\ |\Delta| &= \max\{\Delta x_1, \cdots, \Delta x_m,\ \Delta y_1,\ \cdots, \Delta y_n\} \end{aligned}$$

　とおく．

- 各 D_{ij} から代表点 (ξ_{ij}, η_{ij})（$x_{i-1} \le \xi_{ij} \le y_i,\ y_{j-1} \le \eta_{ij} \le y_j$）をとる



- 関数 $f(x,y)$，分割 Δ，代表点たち $\{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}$ からリーマン和

$$R = R\left(f, \Delta, \{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

- R が分割 Δ や代表点たち $\{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}$ の取り方によらず $|\Delta| \to 0$ とするとき，一定の値 I に近づくとき $f(x,y)$ は D で**積分可能**であるといい，I を

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

とかき，D における $f(x,y)$ の**積分** or **2 重積分**という．

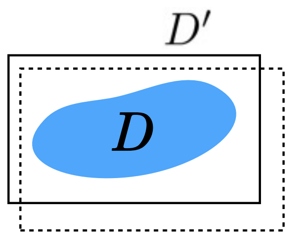
- $f(x,y)$ が D 上連続であるとき，D で積分可能である．

まとめ 2（一般の集合上の 2 重積分の定義）

- D が各辺が座標軸に平行な長方形とは限らない有界な集合である場合を考える．$f(x,y)$ が D で有界な関数とする． $D \subset D'$ となる各辺が座標軸と平行な長方形 D' をとり

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

とする．



$\tilde{f}(x,y)$ が長方形 D' で積分可能であるとき $f(x,y)$ は D で積分可能であるといい

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} \tilde{f}(x,y)dxdy$$

とする．このときこの積分の値は D を含む閉長方形 D' の取り方によらない．また，$f(x,y)$ の積分可能性は集合 D の影響も受ける．

- $f(x,y) \equiv 1$ としたとき，上の意味で D 上積分可能であるとき，D は**面積確定**であるという．このときこの積分の値は D の面積である．

- D が滑らかな曲線を有限個つないでできる曲線で囲まれた領域などは面積確定である．

- 面積確定な有界閉集合で定義された連続関数は積分可能である．

まとめ 3（2 重積分の性質）

D を面積確定集合，$f(x,y)$, $g(x,y)$ は D 上で有界かつ積分可能であるとする．

(1) α, β を定数とすると

$$\iint_D \{\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\} dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy + \beta \iint_D g(x,y)dxdy$$

(2) $f(x,y) \leq g(x,y)$ on D ならば

$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy$$

(3) $f(x,y)g(x,y)$ も D 上積分可能である．

教科書の他に

- $m \leq f(x,y) \leq M$ on D （m, M : 定数） ならば

$$m|D| \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq M|D|$$

ただし $|D|$ は D の面積である．

- $\displaystyle \left| \iint_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy$

- $D = D_1 \cup D_2$ (D_1, D_2 は面積確定で $D_1 \cap D_2 = \emptyset$) のとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

まとめ 4（長方形の場合の計算）

$D = [a,b] \times [c,d]$，$f(x,y)$ を D で連続であるとする．このとき 2 重積分 $\displaystyle \iint_D f(x,y)dxdy$ は次のように計算することができる．

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \Bigg\{ \underbrace{\int_c^d f(x,y)dy}_{x\text{ を固定して }y\text{ について積分}} \Bigg\} dx = \int_c^d \Bigg\{ \underbrace{\int_a^b f(x,y)dx}_{y\text{ を固定して }x\text{ について積分}} \Bigg\} dy$$

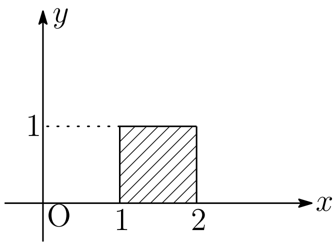
このように 1 変数関数の積分を繰り返して 2 重積分を計算する方法を**累次積分**という．

演習 1

$D = [1,2] \times [0,1] (= \{(x,y) | 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\})$ のとき 2 重積分

$$\iint_D (x^2 - xy)\,dxdy$$

の値を求めよ.



解

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_1^2 \left\{ \underbrace{\int_0^1 (x^2 - xy)dy}_{y \text{ の関数とみての積分} \to x \text{ は定数扱い}} \right\} dx \\
&= \int_1^2 \left[x^2 y - \frac{1}{2} x y^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x \right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^2 \\
&= \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \mathbf{\frac{19}{12}}
\end{aligned}$$

次のように計算してもよい：

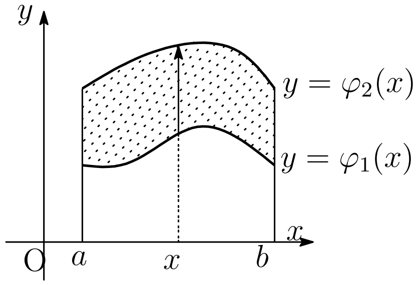
$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^1 \left\{ \underbrace{\int_1^2 (x^2 - xy)dx}_{x \text{ の関数とみての積分} \to y \text{ は定数扱い}} \right\} dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 y \right]_{x=1}^{x=2} dx \\
&= \int_0^1 \left\{ \left(\frac{8}{3} - 2y \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}y \right) \right\} dy = \int_0^1 \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2}y \right) dy \\
&= \left[\frac{7}{3}y - \frac{3}{4}y^2 \right]_0^1 = \mathbf{\frac{19}{12}}
\end{aligned}$$

まとめ 5（縦線型領域・横線型領域）

- 閉区間 $[a,b]$ 上で $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ を満たす連続関数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ を用いて

$$D = \{(x,y) | a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

と表される領域を**縦線型領域**という.



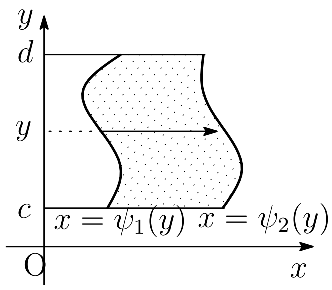
- $f(x,y)$ が上のような領域 D で連続であるとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx$$

- 閉区間 $[c,d]$ 上で $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ を満たす連続関数 $\psi_1(y), \psi_2(y)$ を用いて

$$D = \{(x,y) | c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

と表される領域を**横線型領域**という.



- $f(x,y)$ が上のような領域 D で連続であるとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right\} dy$$

まとめ 6（積分の順序変更）

D が

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) | a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x,y) | c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \end{aligned}$$

（縦線型かつ横線型）

と 2 通りに表されるとする. $f(x,y)$ が D で連続ならば

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right\} dy$$

が成り立つ. このように 2 重積分は 2 通りの累次積分で表されるが, 一方の累次積分を他方の累次積分に直すことを**積分の順序変更**という.

演習 2

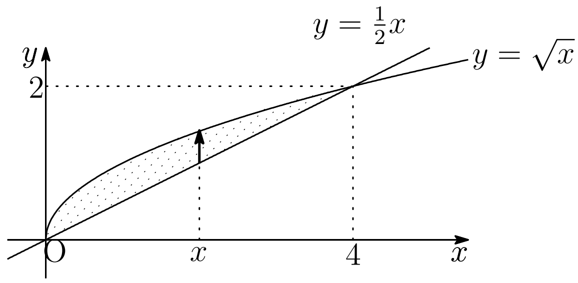
次の 2 重積分を累次積分で求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ D : 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ で囲まれた領域

(2) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ $D := \left\{(x,y)\middle|\,0 \le y \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le x \le \sin y\right\}$

解 必ず領域 D を図示する.

(1) 領域 D を図示すると



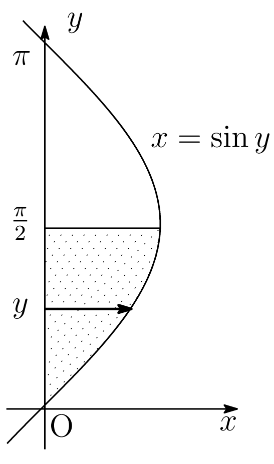
$D=\left\{(x,y)\middle|\,0 \le x \le 4,\ \dfrac{1}{2}x \le y \le \sqrt{x}\right\}$ と表されるので

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^4 \left\{\int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} xy\,dy\right\} dx$$
$$=\int_0^4 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^3\right) dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{32}x^4\right]_0^4 = \frac{64}{6}-\frac{64\cdot 4}{32} = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

注 $D=\{(x,y)|0\le y \le 2,\ y^2 \le x \le 2y\}$ とも表されるので

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^2 \left\{\int_{y^2}^{2y} xy\,dy\right\} dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{x=y^2}^{x=2y}$$
$$=\int_0^2 \left(2y^3-\frac{1}{2}y^5\right) dy = \left[\frac{1}{2}y^4-\frac{1}{12}y^6\right]_0^2$$
$$=\frac{16}{2}-\frac{64}{12} = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

(2) 領域 D を図示すると



$$\begin{aligned}&\iint_D xydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^{\sin y} xdx\right\} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=\sin y}\\ =&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 ydy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 ydy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2y}{2}dy\\ =&\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin 2y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}\end{aligned}$$

演習 3

累次積分 $\displaystyle\int_0^1 \left\{\int_y^1 e^{-x^2}dx\right\} dy$ の値を求めよ.

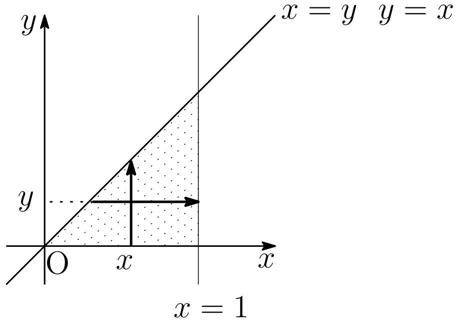
指針

- そのまま計算しようとすると e^{-x^2} の積分を行わなければならないが $F'(x) = e^{-x^2}$ となる $F(x)$ は初等関数でかけないことが知られている（$\to$ 積分の順序変更を試みる）
- そのためには D をまず図示

$$\underline{\underline{\int_0^1}} \ \underbrace{\left\{\int_y^1 e^{-x^2}dx\right\}}\ \underline{\underline{dy}}$$

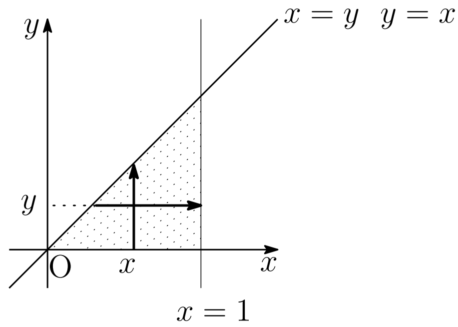
y を 1 つとめたとき,
$(x=)y$ から $(x=)1$ まで積分
(直線 $x=y$ と直線 $x=1$ で挟まれた領域)

y の範囲は 0 から 1 まで



$D = \{(x,y)|0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1\} = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$ と表される.

$\boxed{解}$ $D = \{(x,y) | 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\} = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$ とすると



$$\int_0^1 \left\{ \int_y^1 e^{-x^2} dx \right\} dy = \iint_D e^{-x^2} dxdy$$

$$= \int_0^1 \left\{ \underbrace{\int_0^x e^{-x^2} dy}_{x\text{ は定数扱い}} \right\} dx = \int_0^1 \left[ye^{-x^2} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-x^2)' e^{-x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$$