2025年度　解析III演習 (担当：松澤　寛)　レジメ

No.7　極大・極小

まとめ1（極値とは）

- 関数 $z = f(x,y)$ は点 (a,b) のある近傍 U で

$$f(x,y) < f(a,b) \quad ((x,y) \in U,\ (x,y) \neq (a,b))$$

が成り立つとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で**極大**であるといい，$f(a,b)$ を **極大値**という.

- 同様に

$$f(x,y) > f(a,b) \quad ((x,y) \in U,\ (x,y) \neq (a,b))$$

が成り立つとき $f(x,y)$ は点 (a,b) で**極小**であるといい，$f(a,b)$ を **極小値**という.

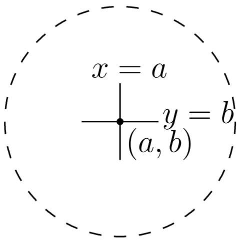
- 極大値と極小値をあわせて極値という.

- $f(x,y)$ が (a,b) で偏微分可能であるとき $f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるならば $f(x,b)$ は $x=a$ で極値をとるので

$$\frac{d}{dx} f(x,b)\Big|_{x=a} = 0 \ \ \text{つまり}\ \ f_x(a,b) = 0$$

同様に $f_y(a,b) = 0$ よって

$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるならば $\boldsymbol{f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0}$



まとめ2（極値の判定）

- 関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) のある近傍で C^2 級で

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

を満たすとする．このとき

$$\Delta = \{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b)$$

とおいたとき

(1) $\Delta < 0$ で $f_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow f(x,y)$ は点 (a,b) は極大

(2) $\Delta < 0$ で $f_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow f(x,y)$ は点 (a,b) は極小

(3) $\Delta > 0 \Rightarrow f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとらない

$\Delta = 0$ のとき，これだけは極値をとるかどうかはわからない.

注 2 次の正方行列（実対称行列）

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} (= D^2 f(a,b),\ H_f(a,b) \text{ ともかく})$$

を**ヘッセ行列**といい，その行列式を**ヘシアン**という：

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - \{f_{xy}(a,b)\}^2 = -\Delta$$

(1) $\leftrightarrow$ ヘッセ行列の固有値がすべて負

(2) $\leftrightarrow$ ヘッセ行列の固有値がすべて正

(3) $\leftrightarrow$ ヘッセ行列の固有値が異符号

また，$\Delta = 0$ は ヘッセ行列が 0 を固有値にもつことと同値である．

まとめ 3（条件付き極値問題）

条件付き極値問題とは

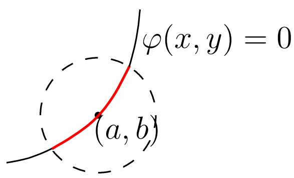
「$\varphi(x,y) = 0$ という条件の下で関数 $f(x,y)$ が極値をとる点を求めよ」

という問題である．

- $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ は点 (a,b) の近傍で定義されており C^1 級とする．
- $z = f(x,y)$ は $\varphi(x,y) = 0$ という条件の下，点 (a,b) で極値をとるとする．このとき，$\varphi_x(a,b) \neq 0$ または $\varphi_y(a,b) \neq 0$ ならば，ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\begin{aligned} &f_x(a,b) - \lambda \varphi_x(a,b) = 0 \\ &f_y(a,b) - \lambda \varphi_y(a,b) = 0 \\ &(\varphi(a,b) = 0) \end{aligned}$$

をみたす．



まとめ 4（ラグランジュの未定乗数法）

$f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ は C^1 級とする．$\varphi(x,y) = 0$ は特異点を持たないとする．また

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda \varphi(x,y)$$

とおく．このとき，条件 $\varphi(x,y) = 0$ のもとで $z = f(x,y)$ で極値をとる点において

$$F_x(x,y,\lambda) = 0,\ F_y(x,y,\lambda) = 0,\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0$$

が成り立つ．λ を**ラグランジュ乗数**という．

これにより求めた点で実際に極値をとるかどうかを調べるためにはさらに計算が必要である．補足のまとめと演習 2-(2) で扱う．

演習 1

関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ の極値を全て求めよ.

$\boxed{解}$

- $f_x=3x^2-3y,\ f_y=3y^2-3x$
- 極値をとる点では $f_x=f_y=0$ であるから

$$\begin{cases} 3x^2-3y=0\cdots① \\ 3y^2-3x=0\cdots② \end{cases}$$

① より $y=x^2$, ②より $x=y^2$ であるから $x^4=x$ つまり $x^4-x=0$ である．これより

$$x(x^3-1)=0 \quad x(x-1)(x^2+x+1)=0$$

である．$x^2+x+1=0$ は虚数解であることに注意して $x=0,1$ である.

- ① より $x=0$ のとき $y=0$, $x=1$ のとき $y=1$ であるから

$$(x,y)=(0,0),(1,1)$$

で極値を取りうる.

- $f_{xx}=6x,\ f_{xy}=-3,\ f_{yy}=6y$ より

$$\Delta=f_{xy}-f_{xx}f_{yy}=9-36xy$$

である.

- $(0,0)$ では $\Delta=9>0$ であるので極値をとらない.
- $(1,1)$ では $\Delta=-27<0,\ f_{xx}(1,1)=6>0$ であるから極小であり，極小値は $f(1,1)=-1$
- 以上より $(1,1)$ で極小値 -1 をとる.

演習 2

条件 $x^2+xy+y^2=1$ という条件のもとで関数 x^2+y^2 の極値を求めたい．以下の問に答えよ．

(1) ラグランジュの未定乗数法により，極値を取りうる点を求めよ．

(2) (1) で求めた点で実際に極値をとるかどうか調べよ．

解 (1)

- $\varphi(x,y)=x^2+xy+y^2-1,\ f(x,y)=x^2+y^2$ とおく．
- $\varphi_x=2x+y,\ \varphi_y=x+2y$ より $\varphi_x=\varphi_y=0$ となるのは $(x,y)=(0,0)$ のときだが，$\varphi(x,y)=0$ を満たさない．よって $\varphi(x,y)=0$ 上には特異点はない．
- $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$ とおく．$\varphi(x,y)=0$ という条件のもとで $f(x,y)$ が極値をとる点では

$$F_x(x,y,\lambda)=0,\ F_y(x,y,\lambda)=0,\ F_\lambda(x,y,\lambda)=0$$

つまり

$$\begin{cases} 2x-\lambda(2x+y)=0\cdots ① \\ 2y-\lambda(x+2y)=0\cdots ② \\ x^2+xy+y^2=1\cdots ③ \end{cases}$$

- ①, ② より

$$\begin{cases} 2(1-\lambda)x-\lambda y=0 \\ -\lambda x+2(1-\lambda)y=0 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & -\lambda \\ -\lambda & 2(1-\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり連立一次方程式を得る．係数行列の行列式

$$\begin{vmatrix} 2(1-\lambda) & -\lambda \\ -\lambda & 2(1-\lambda) \end{vmatrix}=(2-\lambda)(2-3\lambda)$$

が 0 でないとき $(x,y)=(0,0)$ のみとなるがこれは $\varphi(x,y)=0$ を満たさない．よって $\lambda=2,\dfrac{2}{3}$ となる．

- $\lambda=2$ のとき $-2x-2y=0$ つまり $x+y=0,\ y=-x$ であるから ③ に代入して $x^2=1$ である．よって $x=\pm1$ であるので $(x,y)=(1,-1),(-1,1)$ である．
- $\lambda=\dfrac{2}{3}$ のとき $x-y=0$ つまり $y=x$ であるから ③ に代入して $3x^2=1$ である．よって $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるので $(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ である．
- 以上より極値を取りうる点として $(1,-1),(-1,1),\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を得る．

(2) （かなり計算が大変である）

- (1) で示したように $\varphi_x = \varphi_y = 0$ となるのは $(0,0)$ のときのみより (1) で求めた極値をとりうる４点の近傍では $\varphi(x,y) = 0$ は陰関数 $y = y(x)$ あるいは $x = x(y)$ が定まる．特に $\varphi_y \neq 0$ より $y = y(x)$ と表される．

- $f(x,y) = x^2 + y^2$ より $f(x, y(x)) = x^2 + y(x)^2$ だから

$$\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = 2x + 2y(x)y'(x)$$
$$\frac{d^2}{dx^2} f(x, y(x)) = 2 + 2y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) \cdots ④$$

ここで $y'(x)$, $y''(x)$ を陰関数を用いて求める．

- $\varphi = 0$ より $x^2 + xy(x) + y(x)^2 = 1$ だから両辺を x で微分すると

$$2x + y(x) + xy'(x) + 2y(x)y'(x) = 0$$
$$(x + 2y(x))y'(x) = -(2x + y(x)) \cdots ⑤$$

さらに x で微分して

$$(1 + 2y'(x))y'(x) + (x + 2y(x))y''(x) = -2 - y'(x)$$
$$(x + 2y(x))y''(x) = -2(1 + y'(x) + y'(x)^2)$$
$$y''(x) = -\frac{2(1 + y'(x) + y'(x)^2)}{x + 2y(x)} \cdots ⑥$$

- $(x,y) = (1,-1)$ のとき

$$⑤ \text{ より } \{1 + 2(-1)\}y'(1) = -2 \cdot 1 - (-1) \quad y'(1) = 1$$
$$⑥ \text{ より } y''(1) = -\frac{2(1+1+1)}{1 + 2(-1)} = 6$$

より ④ に代入して

$$\left.\frac{d^2}{dx^2} f(x, y(x))\right|_{x=1} = 2 + 2 \cdot 1^2 + 2(-1)6 = -8 < 0$$

よって $(x,y) = (1,-1)$ で極大値 $f(1,-1) = 2$

- $(x,y) = (-1,1)$ のとき同様にして

$$y'(-1) = 1, \quad y''(-1) = -6$$
$$\left.\frac{d^2}{dx^2} f(x, y(x))\right|_{x=-1} = -8 < 0$$

よって $(x,y) = (-1,1)$ で極大値 $f(1,-1) = 2$

- $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき

$$⑤ \text{ より } \left\{\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} y'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad y'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -1$$
$$⑥ \text{ より } y''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2(1 + (-1) + 1)}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

より ④ に代入して

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))\right|_{x=\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2+2(-1)^2+2\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{3} > 0$$

よって $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき で極小値 $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3}$

- $(x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき同様にして

$$y'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-1,\quad y''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\left.\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))\right|_{x=-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{8}{3} > 0$$

よって $(x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ で極小値 $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3}$

同じ考え方で条件付き極値問題における判定条件を得ることができる：

補足のまとめ（条件付き極値の判定）

- $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$: C^2 級
- $\varphi(x,y)=0$ は特異点をもたない
- $f(x,y)$ は条件「$\varphi(x,y)=0$」の下で点 (a,b) で極値をとるとする．
- このとき

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$$

とおくと，ある $\lambda_0\in\mathbb{R}$ があって

$$F_x(a,b,\lambda_0)=0,\ F_y(a,b,\lambda_0)=0,\ F_\lambda(a,b,\lambda_0)=0$$

が成り立つ（ラグランジュの未定乗数法）．

- $\varphi_y(a,b)\neq 0$ とすると (a,b) の近傍で $\varphi(x,y)=0$ から定まる陰関数 $y=y(x)$ が存在する．このとき

$$y'(x)=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y},\quad y''(x)=-\frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2-2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y+\varphi_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^3}$$

である（陰関数定理と陰関数の第 2 次導関数の公式（例題等））．

- $f(x,y(x))$ の $x=a$ における 2 回微分の値を調べる．

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}f(x,y(x))\\
=&f_x(x,y(x))+f_y(x,y(x))y'(x)=f_x+f_yy'\\
&\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))\\
=&(f_{xx}+f_{xy}y')+\{(f_{yx}+f_{yy}y')y'+f_{yy}y''\}\\
=&f_{xx}+2f_{xy}y'+f_{yy}(y')^2+f_{yy}y''\\
=&f_{xx}+2f_{xy}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+f_{yy}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2+f_y\left(-\frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2-2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y+\varphi_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^3}\right)\\
=&\frac{f_{xx}\varphi_y^2-2f_{xy}\varphi_x\varphi_y+f_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^2}+\frac{f_y}{\varphi_y}\left(-\frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2-2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y+\varphi_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^2}\right)
\end{aligned}$$

$\dfrac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}=\lambda_0$ であるから $x=a$ （つまり $(x,y,\lambda)=(a,b,\lambda_0)$） では

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))\Big|_{x=a}\\
=&\frac{f_{xx}\varphi_y^2-2f_{xy}\varphi_x\varphi_y+f_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^2}+\lambda_0\left(-\frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2-2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y+\varphi_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^2}\right)\\
=&\frac{(f_{xx}-\lambda_0\varphi_{xx})\varphi_y^2-2(f_{xy}-\lambda_0\varphi_{xy})\varphi_x\varphi_y+(f_{yy}-\lambda_0\varphi_{yy})\varphi_x^2}{\varphi_y^2}\\
=&\frac{F_{xx}\varphi_y^2-2F_{xy}\varphi_x\varphi_y+F_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^2}
\end{aligned}$$

- これを行列式を用いて表すと

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y(x))\Big|_{x=a} = -\frac{1}{\varphi_y^2}\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_x & F_{xx} & F_{xy} \\ \varphi_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}(a,b,\lambda_0)$$

となる．この値が >0 であれば極小，<0 であれば極大である．

- $\varphi_x(a,b) \neq 0$ の場合 (a,b) の近傍で $\varphi(x,y)=0$ から定まる陰関数 $x=x(y)$ が存在する．このとき

$$x'(y) = -\frac{\varphi_y}{\varphi_x}, \quad x''(y) = -\frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2 - 2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y + \varphi_{yy}\varphi_x^2}{\varphi_y^3}$$

- 同様に $f(x(y),y)$ の $y=b$ における 2 回微分の値を調べる．これを行列式を用いて表すと

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x(y),y)\Big|_{y=b} = -\frac{1}{\varphi_x^2}\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_x & F_{xx} & F_{xy} \\ \varphi_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}(a,b,\lambda_0)$$

となる．この値が >0 であれば極小，<0 であれば極大である．