

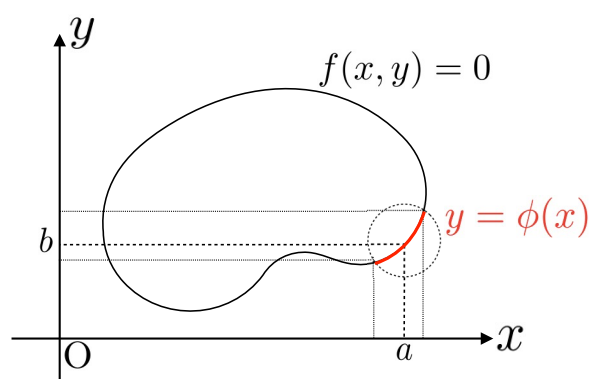
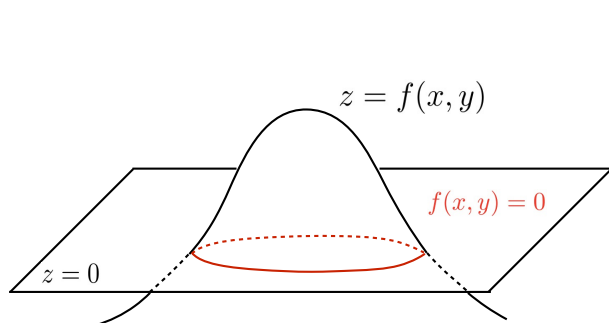
No.6 陰関数

まとめ 1 (陰関数とは)

- 変数 x と y の間に

$$f(x, y) = 0$$

で与えられる関係があるとき, x の変域と y の変域を適当に定めることにより, y が x の関数と考えることができる場合がある. これを, 方程式 $f(x, y) = 0$ から定まる陰関数という.



- 一般的に方程式 $f(x, y) = 0$ は平面上の曲線を与える. 曲線 $f(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) の「まわり」で曲線が 1 変数関数 $y = \phi(x)$ のグラフとなっているための十分条件を与えるのが陰関数定理である.

まとめ 2 (陰関数定理 1)

- $f(x, y)$ を点 (a, b) を含む開集合で定義された C^1 級関数とする.
- $f(a, b) = 0$ (← 点 (a, b) が曲線 $f(x, y) = 0$ 上にあるということ) かつ $f_y(a, b) \neq 0$ ならば $x = a$ を含む开区間 I で次の性質をもつ関数 $y = \phi(x)$ がただ 1 つ定まる

$$(1) \quad b = \phi(a)$$

$$(2) \quad f(x, \phi(x)) = 0 \quad (x \in I)$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \phi'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \quad \left(= -\frac{f_x(x, \phi(x))}{f_y(x, \phi(x))} \right)$$

上の式は $f(x, \phi(x)) = 0$ の両辺を x で微分すれば合成関数の微分法より

$$f_x(x, \phi(x)) + f_y(x, \phi(x))\phi'(x) = 0$$

から得られる.

注

- $f_y(a, b) = 0$ であっても $f_x(a, b) \neq 0$ であれば上の陰関数定理において x と y の立場を入れかえることにより $y = b$ を含む開区間 J で定義された関数 $x = \psi(y)$ で次の性質をもつものがただ1つ存在する：

$$(1)' \quad a = \psi(b)$$

$$(2)' \quad f(\psi(y), y) = 0 \quad (y \in J)$$

$$(3)' \quad \frac{dx}{dy} = \psi'(y) = -\frac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)} \left(= -\frac{f_y(\psi(y), y)}{f_x(\psi(y), y)} \right)$$

- 曲線 $f(x, y) = 0$ 上の点で $f_x = f_y = 0$ となる点を**特異点**という。

まとめ 3 (接線)

- 曲線 $f(x, y) = 0$ 上の点の特異点でなければ、その点のまわりで曲線は $y = \phi(x)$ or $x = \psi(y)$ の形で表され、接線が1本だけ引ける。
- 実際、 $f(a, b) = 0$, $f_y(a, b) \neq 0$ であれば陰関数定理より、曲線 $f(x, y) = 0$ は点 (a, b) のまわりで (1), (2), (3) を満たす関数 $y = \phi(x)$ のグラフとして表される。この曲線の点 (a, b) における接線の傾きは

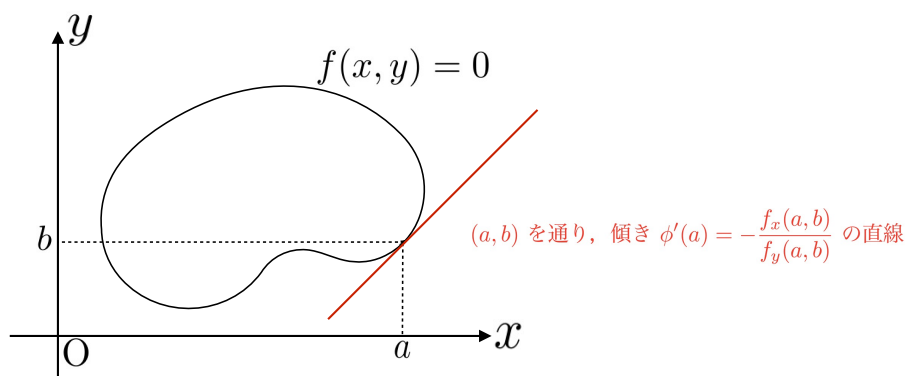
$$\phi'(a) = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}$$

だから、この曲線の点 (a, b) における接線の方程式は

$$y - b = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}(x - a)$$

$$\mathbf{f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0}$$

↑ $f_y(a, b) = 0$ でも $f_x(a, b) \neq 0$ であれば同じ式が得られる



- $f(x, y, z) = 0$ は一般に空間内の曲面を表す.

例

- $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (原点中心, 半径1の球(面))
- $ax + by + cz + d = 0$ ($(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$)
($\vec{n} = (a, b, c)$ を法線ベクトルとする平面)
- 曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上の点 (a, b, c) の「まわり」で曲面が2変数関数 $z = \phi(x, y)$ のグラフとして表されるための十分条件が次の version の陰関数定理である.

まとめ4 (陰関数定理2)

- $f(x, y, z)$ は点 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ を含む $\mathbb{R}^3$ の開集合で定義された C^1 級の関数とする.
- $f(a, b, c) = 0, f_z(a, b, c) \neq 0$ ならば $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ を含む $\mathbb{R}^2$ のある開集合 U で定義された次の性質をもつ関数 $z = \phi(x, y)$ がただ1つ定まる:

(1) $c = \phi(a, b)$

(2) $f(x, y, \phi(x, y)) = 0$ ($(x, y) \in U$)

(3) $z = \phi(x, y)$ は C^1 級で

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} = \phi_x(x, y) &= -\frac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)} \left(= -\frac{f_x(x, y, \phi(x, y))}{f_z(x, y, \phi(x, y))} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \phi_y(x, y) &= -\frac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)} \left(= -\frac{f_y(x, y, \phi(x, y))}{f_z(x, y, \phi(x, y))} \right)\end{aligned}$$

まとめ5 (接平面)

- $f(x, y, z)$ は点 (a, b, c) を含む $\mathbb{R}^3$ の開集合で C^1 級とする.
- 曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上の点 (a, b, c) における接平面の方程式は $f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c)$ のいずれかが0でなければ, 次で与えられる:

$$f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

演習 1

平面上の曲線 $y^2 = x^3 - x$ の点 $(2, \sqrt{6})$ における接線の方程式を求めよ.

解

$f(x, y) = y^2 - x^3 + x$ とおく.

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 1, \quad f_y(x, y) = 2y$$

より

$$f_x(2, \sqrt{6}) = -11, \quad f_y(2, \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$$

よって求める接線の方程式は

$$(f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0)$$

$$-11(x - 2) + 2\sqrt{6}(y - \sqrt{6}) = 0$$

$$11x - 2\sqrt{6}y - 10 = 0$$

演習 2

$f(x, y)$ を (a, b) の近傍で定義された C^2 級関数で, $f(a, b) = 0$, $f_y(a, b) \neq 0$ とする. このとき (a, b) の近傍で $f(x, y) = 0$ から定まる陰関数 $y = \phi(x)$ は 2 階微分可能であり $\phi''(x)$ は

$$\phi''(x) = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

で与えられることを示せ. ただし, 右辺について (x, y) に $(x, \phi(x))$ が代入されているとする.

解 陰関数定理より $x = a$ を含む開集合 I で定義された関数 $y = \phi(x)$ で

- $b = \phi(a)$
- $f(x, \phi(x)) = 0 \quad (x \in I)$
- $\phi \in C^1(I)$ で

$$\frac{dy}{dx} = \phi'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{f_x(x, \phi(x))}{f_y(x, \phi(x))} \dots \textcircled{1}$$

①の両辺を x で微分すると

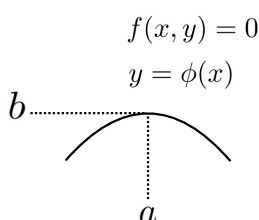
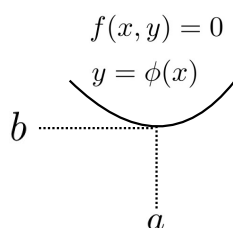
$$\begin{aligned} \phi''(x) &= -\frac{\left[\frac{d}{dx}f_x\right]f_y - f_x\left[\frac{d}{dx}f_y\right]}{f_y^2} \quad \leftarrow \frac{d}{dx}f_x(x, \phi(x)) = f_{xx}(x, \phi(x)) + f_{xy}(x, \phi(x))\phi'(x) \text{ (合成関数の微分)} \\ &= -\frac{[f_{xx} + f_{xy}\phi']f_y - f_x[f_{yx} + f_{yy}\phi']}{f_y^2} \quad \leftarrow \phi' = -\frac{f_x}{f_y} \\ &= -\frac{\left[f_{xx} + f_{xy}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)\right]f_y - f_x\left[f_{yx} + f_{yy}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)\right]}{f_y^2} \quad \leftarrow \text{分母分子に } f_y \text{ をかける} \\ &= -\frac{f_{xx}f_y^2 - f_{xy}f_xf_y - f_{yx}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3} \quad \leftarrow f_{xy} = f_{yx} \\ &= -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3} \end{aligned}$$

注 $f_y(a, b) \neq 0$ のとき $\phi'(a) = 0 \Leftrightarrow f_x(a, b) = 0$ だから, このとき

$$\phi''(a) = -\frac{f_{xx}(a, b)}{f_y(a, b)}$$

よって

- $\phi''(a) = -\frac{f_{xx}(a, b)}{f_y(a, b)} > 0 \Rightarrow \text{極小}$
- $\phi''(a) = -\frac{f_{xx}(a, b)}{f_y(a, b)} < 0 \Rightarrow \text{極大}$



演習 3

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3 \quad (a, b, c > 0)$$

で表される曲面の点 (a, b, c) における接平面の方程式を求めよ.

解

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 3 \text{ とおく.}$$

$$f_x(x, y, z) = 2\frac{x}{a^2}, \quad f_y(x, y, z) = 2\frac{y}{b^2}, \quad f_z(x, y, z) = 2\frac{z}{c^2}$$

より

$$f_x(a, b, c) = \frac{2}{a}, \quad f_y(a, b, c) = \frac{2}{b}, \quad f_z(a, b, c) = \frac{2}{c}$$

よって求める接平面の方程式は

$$(f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c) = 0)$$

$$\frac{2}{a}(x - a) + \frac{2}{b}(y - b) + \frac{2}{c}(z - c) = 0$$

$$\frac{2}{a}x + \frac{2}{b}y + \frac{2}{c}z = 6$$

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z = 3$$

$$bcx + cay + abz = 3abc$$