

2025年度 解析Ⅲ 演習(担当:松澤 寛) レジメ

No.5 Taylor の定理

復習 (1変数関数の Taylor の定理)

- 関数 $f(x)$ は a を含む開区間 I で $n+1$ 回微分可能であるならば, 各 $x \in I$ に対して

$$f(x) = \sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}(a)}{r!} (x-a)^r + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

となる c が a と x の間に存在する.

- $R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ をラグランジュの剰余項という. この c のかわりに $a + \theta(x-a)$ となる $\theta \in (0, 1)$ が存在するという形で述べられることがある.
- $x = a + h$ とおくと, $a + h \in I$ ならば

$$f(a+h) = \sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}(a)}{r!} h^r + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

となる θ が存在する.

まとめ C^n 級・ C^∞ 級

$f(x, y)$ はある開集合 U で定義されているとする. U において第 n 次偏導関数まで存在してそれらがすべて連続であるとき, f は U で C^n 級であるといい, $f \in C^n(U)$ と表す. $f \in C^0(U)$ は f が U で連続な関数であることを意味する. また,

$$C^\infty(U) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(U)$$

と定義する.

まとめ 2 (記号)

- $z = f(x, y)$ は点 (a, b) の近傍で C^1 級とする. $z = f(a + ht, b + kt)$ (a, b, h, k : 定数) に対して

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(a + ht, b + kt)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a + ht, b + kt)k \\ &= h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \quad \leftarrow x = a + ht, y = b + kt \text{ が代入されている} \end{aligned}$$

- ここで f の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を用いてつくる $h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}$ を $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f$ と書くことにする.
- f が C^n 級であるとき

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f \quad (n \geq 2)$$

が定義されたとして

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f \right\}$$

と定義する.

- 例えば

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= h \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) + k \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

- f が C^n 級であるとき

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f = \sum_{r=0}^n {}_n C_r h^{n-r} k^r \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r} \partial y^r} \quad \text{二項定理と同じ}$$

- また $\left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \right]_{(x,y)=(a,b)}$ を $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b)$ と略記する.

- $z = f(x, y)$ が点 (a, b) の近傍で C^n 級であるとき, 合成関数 $z = f(a + ht, b + kt)$ は $t = 0$ の近傍で C^n 級である. 以上の記法を用いるとその導関数は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(a + ht, b + kt)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a + ht, b + kt)k = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a + ht, b + kt) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a + ht, b + kt) \\ &\vdots \\ \frac{d^n z}{dt^n} &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + ht, b + kt) \end{aligned}$$

まとめ 3 (Taylor の定理)

- $z = f(x, y)$ は点 (a, b) を含む開集合 U で定義された関数で C^n 級であるとする.
- このとき定数 h, k に対して (a, b) と $(a + h, b + k)$ を結ぶ線分が U に含まれるならば

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^r f(a, b) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k) \quad (0 < \theta < 1)$$

を満たす θ が存在する.

- $a = 0, b = 0$ のとき **Maclaurin の定理** という.
- Taylor の定理・Maclaurin の定理において, h, k に関する r 次の項

$$\frac{1}{r!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^r f(a, b)$$

は次のようになる:

$$\frac{1}{r!} \sum_{j=0}^r {}^r C_j \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-j} \partial y^j} (a, b) h^{r-j} k^j$$

$a + h = x, b + k = y$ とすれば

$$\frac{1}{r!} \sum_{j=0}^r {}^r C_j \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-j} \partial y^j} (a, b) (x - a)^{r-j} (y - b)^j$$

$a = 0, b = 0$ のとき

$$\frac{1}{r!} \sum_{j=0}^r {}^r C_j \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-j} \partial y^j} (0, 0) x^{r-j} y^j$$

- $r = 1$ のときは $f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$
- $r = 2$ のとき

$$\frac{1}{2!} \{ f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2 \}$$

- $r = 3$ のとき

$$\frac{1}{3!} \{ f_{xxx}(a, b)(x - a)^3 + 3f_{xxy}(a, b)(x - a)^2(y - b) + 3f_{xyy}(a, b)(x - a)(y - b)^2 + f_{yyy}(a, b)(y - b)^3 \}$$

演習

$f(x, y) = \frac{1}{1+x+2y}$ について点 $(0, 0)$ におけるテイラーの定理の式 (つまり, マクローリンの定理の式) を第 2 次まで求めよ.

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{1}{(1+x+2y)^2}, & \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{2}{(1+x+2y)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2}{(1+x+2y)^3}, & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \frac{4}{(1+x+2y)^3}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{8}{(1+x+2y)^3}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}f(0, 0) &= -1, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= -1, & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= -2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) &= 2, & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0, 0) &= 4, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) &= 8\end{aligned}$$

よって求める式は

$$\begin{aligned}& f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2 \right\} \\ &= 1 - x - 2y + \frac{1}{2}(2x^2 + 8xy + 8y^2) \\ &= 1 - (x + 2y) + (x^2 + 4xy + 4y^2) \\ &= 1 - (x + 2y) + (x + 2y)^2\end{aligned}$$