

2025年度 解析Ⅲ演習(担当:松澤 寛) レジメ

No.3 全微分

復習 (1変数関数の微分可能性)

- $x = a$ の近傍で定義された関数 $f = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとは

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在することであった。これを言い換えると

- ある実数 A があって

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A \right\} = 0$$

が成り立つことで、このとき $A = f'(a)$ と書くのであった。

- 書き換えると

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \{f(a) + A(x - a)\}}{x - a} = 0$$

であるから

- $f = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとは、ある実数 A があって

$$g(x) = f(x) - \{f(a) + A(x - a)\}$$

とおくと

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x - a} = 0$$

が成り立つことであるといいかえることができる。

- このとき、 $A = f'(a)$ であり、直線 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ を曲線 $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における接線というのであった。

まとめ 1 (全微分可能性)

- 関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) のある近傍で定義されているとする.

$f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能であるとは, ある $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ があって

$$g(x, y) := f(x, y) - \{f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b)\}$$

が

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

を満たすことである.

- f が点 (a, b) で全微分可能ならば
 - f は点 (a, b) で連続
 - f は点 (a, b) で x, y について偏微分可能で

$$\alpha = f_x(a, b), \quad \beta = f_y(a, b)$$

まとめ 2 (全微分可能性の十分条件)

関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) の近傍で x, y について偏微分可能で, 偏導関数 f_x, f_y のいずれかが点 (a, b) で連続であれば $f(x, y)$ は点 (a, b) で全微分可能である.

まとめ 3 (接平面)

関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能であるとき平面

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

を曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面という.

演習 1

関数 $f(x, y) = |xy|^\alpha$ ($\alpha > 1/2$) について次の問いに答えよ。

(1) $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で x, y について偏微分可能であることを証明せよ。

(2) $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で全微分可能であることを証明せよ。

証明

(1) 任意の $h \neq 0$ に対して, $f(0 + h, 0) = 0$ であるから

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

よって

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

したがって f は点 $(0, 0)$ で x について偏微分可能で, $f_x(0, 0) = 0$ である。

全く同様にして, f は点 $(0, 0)$ で y について偏微分可能で, $f_y(0, 0) = 0$ である。

(2) $g(x, y)$ を

$$g(x, y) = f(x, y) - \{f(0, 0) + f_x(0, 0)(x - 0) + f_y(0, 0)(y - 0)\}$$

とおくと $g(x, y) = |xy|^\alpha - \{0 + 0(x - 0) + 0(y - 0)\} = |xy|^\alpha$ である。

$$\frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

について, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと

$$0 \leq \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|r^2 \cos \theta \sin \theta|^\alpha}{r} \leq r^{2\alpha - 1}$$

である。 $\alpha > 1/2$ より $2\alpha - 1 > 0$ である。 $(x, y) \rightarrow 0$ のとき $r \rightarrow 0$ であるから

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

よって $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で全微分可能である。

演習 2

a, b を正の定数とする. 曲面 $z = \sqrt{3 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ 上の点 $(a, b, 1)$ における接平面の方程式を求めよ.

解

- $f(x, y) = \sqrt{3 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ とおく.

- $f(a, b) = 1$

- $f(x, y) = \left(3 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}$ より

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{2} \left(3 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} \left(-\frac{2x}{a^2}\right) \\ &= -\frac{x}{a^2 \sqrt{3 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \end{aligned}$$

- 同様にして

$$f_y = -\frac{y}{b^2 \sqrt{3 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

- $f_x(a, b) = -\frac{1}{a}$, $f_y(a, b) = -\frac{1}{b}$ であるから求める方程式は

$$\begin{aligned} z &= 1 + \left(-\frac{1}{a}\right)(x - a) + \left(-\frac{1}{b}\right)(y - b) \\ \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + z &= 3 \end{aligned}$$