2025 年度　解析 III 演習（担当：松澤　寛）　レジメ

No.2　偏導関数

まとめ 1（偏微分係数）

- 関数 $z = f(x, y)$ は点 (a, b) のある近傍で定義されているとする.
- $y = b$ と固定すると $z = f(x, b)$ は x の関数（1 変数関数）である．これが $x = a$ で微分可能, つまり

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

が存在するとき，$f(x, y)$ は<u>点 (a, b) で x について**偏微分可能**</u>であるという．この極限値を

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b), \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_x(a, b), \quad z_x(a, b)$$

などと表し，点 (a, b) における x についての**偏微分係数**という.

- y について偏微分可能，y についての偏微分係数も同様に定義され，次のように表す：

$$\frac{\partial z}{\partial y}(a, b), \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_y(a, b), \quad z_y(a, b)$$

まとめ 2（偏導関数）

- $f(x, y)$ はある開集合 D で定義されているとする.
- $f(x, y)$ が D の各点 (x, y) で x について偏微分可能であるとき，D 上で

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

が定義される．この関数を $f(x, y)$ の x についての**偏導関数**といい

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial x}, \ f_x(x, y), \ f_x, \ z_x$$

などと表す.

- y についての偏導関数も同様に定義され

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ f_y(x, y), \ f_y, \ z_y$$

などと表す.

- x (or y) について偏導関数を求めることを x (or y) で**偏微分する**という.
- 偏微分の計算は片方の変数を定数と考え，1 変数関数の微分と同様に行う.

まとめ 3（高次偏導関数）

$z = f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ がさらに x, y について偏微分可能であるとき，その偏導関数を $f(x, y)$ の**第 2 次偏導関数**といい，次のように表す：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = z_{xx},\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = z_{yx},\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = z_{xy},\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = z_{yy},
\end{aligned}
$$

まとめ 4（偏微分の順序）

点 (a, b) の近傍で f_{xy}, f_{yx} が存在し，ともに (a, b) で連続であるならば

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

さらに，f_{xy}, f_{yx} がともに D で連続であるならば D 上で

$$f_{xy} = f_{yx}$$

が成り立つ.

演習１

次の関数について，偏導関数，第２次偏導関数を求めよ．

(1) $z = e^{2x}\sin 2y$　　(2) $z = \log(x^2+y^2)$

証明

(1)

$$z_x = (e^{2x})_x \sin 2y = 2e^{2x}\sin 2y$$

$$z_y = e^{2x}(\sin 2y)_y = e^{2x}(2\cos 2y) = 2e^{2x}\cos 2y$$

$$z_{xx} = 2(e^{2x})_x \sin 2y = 4e^{2x}\sin 2y$$

$$z_{xy} = 2e^{2x}(\sin 2y)_y = 2e^{2x}(2\cos 2y) = 4e^{2x}\cos 2y$$

$$z_{yx} = 2(e^{2x})_x \cos 2y = 4e^{2x}\cos 2y$$

$$z_{yy} = 2e^{2x}(\cos 2y)_y = 2e^{2x}(-2\sin 2y) = -4e^{2x}\sin 2y \quad //$$

(2)

$$z_x = \frac{(x^2+y^2)_x}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$z_y = \frac{(x^2+y^2)_y}{x^2+y^2} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$z_{xx} = \frac{(2x)_x(x^2+y^2) - 2x(x^2+y^2)_x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

$$z_{xy} = 2x\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)_y = 2x\left\{-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right\} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_{yx} = 2y\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)_x = 2y\left\{-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right\} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_{yy} = \frac{(2y)_y(x^2+y^2) - 2y(x^2+y^2)_y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \quad //$$

演習２

次の関数は点 $(0,0)$ において x, y について偏微分可能であるが，点 $(0,0)$ で連続でないことを証明せよ.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

解 任意の $h\neq 0$ に対して

$$f(0+h,0)=\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2}=0,\quad f(0,0+h)=\frac{0\cdot h}{0^2+h^2}=0$$

であるので

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0,\quad \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=0$$

よって

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0,\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=0$$

したがって f は点 $(0,0)$ で偏微分可能であり，$f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ である.

一方，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ は存在しない.

実際，直線 $y=x$ 上（原点以外）では

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

よって直線 $y=x$ に沿って点 (x,y) を点 $(0,0)$ に近づけると $f(x,y)$ の値は $\dfrac{1}{2}$ に近づく.

一方，直線 $y=0$ 上（原点以外）では

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

よって直線 $y=0$ に沿って点 (x,y) を点 $(0,0)$ に近づけると $f(x,y)$ の値は 0 に近づく.

以上より $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ は存在しないので f は点 $(0,0)$ で連続ではない. //