

No.1 2変数関数の極限

まとめ 1 (2 変数関数)

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, $M \subset \mathbb{R}^2$ ($M \neq \emptyset$) とする.
- 各 $(x, y) \in M$ に対してただ 1 つの $z \in \mathbb{R}$ が定まる時 z は M 上で定義された (x, y) の **2 変数関数** といい, $z = f(x, y)$ と表す. M を $f(x, y)$ の **定義域** という.
- $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $\{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in M\}$ を関数 $f(x, y)$ の **グラフ** という. 2 変数関数のグラフは一般的に $\mathbb{R}^3$ 内の 曲面 である.

まとめ 2 (2 変数関数の極限)

- $\mathbb{R}^2$ の点 $P(a, b)$ に対して, $U_\varepsilon(P) = \{(x, y) | \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon\}$ を P の ε **近傍** という.
- $f(x, y)$ は点 $P(a, b)$ の近傍 $U_\varepsilon(P)$ の P 以外, つまり $U_\varepsilon(P) \setminus \{P\}$ で定義されているとする ($P(a, b)$ で定義されている必要はない).
- 点 (x, y) が点 (a, b) に限りなく近づくとき, $f(x, y)$ が一定の値 l に限りなく近づくならば
 (x, y) が (a, b) に近づくとき, $f(x, y)$ の **極限值** は l である
 といい,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l, \quad f(x, y) \rightarrow l \quad (\text{as } (x, y) \rightarrow (a, b))$$

などとかく.

- $\varepsilon - \delta$ 式の定義は次の通りである:

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$$

が成り立つ.

- 次が成り立つ: $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = m$ の時

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \{f(x, y) + g(x, y)\} = l + m$$

$$(2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)g(x, y) = lm \quad \text{特に} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} cf(x, y) = cl \quad (c \text{ は定数})$$

$$(3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{l}{m} \quad (\text{ただし } m \neq 0)$$

まとめ 3 (関数の連続性)

- 関数 $f(x, y)$ に対して

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

が成り立つとき, $f(x, y)$ は点 (a, b) で連続であるという.

- $\varepsilon - \delta$ 式定義は次の通りである: $f(x, y)$ が $M \subset \mathbb{R}^2$ で定義されており, $(a, b) \in M$ で連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して

$$(x, y) \in M, \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$$

が成り立つことである.

- $f(x, y)$ が M 上の各点で連続であるとき, $f(x, y)$ は M で連続であるという.

まとめ 4 (有界・開集合・閉集合)

$M \subset \mathbb{R}^2$ とする.

- ある $R > 0$ があって $M \subset U_R(O)$ (O は原点) とできるとき M は**有界**であるという.
- M の任意の点 $P(x, y)$ に対してある $\varepsilon > 0$ があって, $U_\varepsilon(P) \subset M$ とできるとき, M は**開集合**であるという.
- $M = G^c$ (G : 開集合) と書けるとき, M は**閉集合**であるという.
- Weierstrass の最大値定理**: 有界な閉集合 M で定義された連続関数は M で最大値と最小値をとる.

演習 1

次の極限值が存在するかどうか調べよ. 存在するときは極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

証明

(1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと

$$\frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \frac{2r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} = 2r \cos^2 \theta \sin \theta$$

より

$$\left| \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \right| = |2r \cos^2 \theta \sin \theta| \leq 2r$$

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$ は $r \rightarrow 0$ と同じことなので $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0$ である.

注 $\varepsilon - \delta$ 式には

$$\left| \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq 2r$$

より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta = \varepsilon/2$ とすれば, $(r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$ だから)

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq 2r < 2\delta = \varepsilon$$

が成り立つ. よって $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0$ が成り立つ.

(2)

同じように考えると $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r^2} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ である. r がなく θ だけ $\rightarrow \theta$ により値が異なる $\rightarrow$ 極限值が存在しないのでは?

- 直線 $y = x$ 上 (原点以外) では $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0$ なので, 直線 $y = x$ に沿って $(0, 0)$ に近づけると 0 に近づく.
- 直線 $y = 0$ 上 (原点以外) では $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1$ なので, 直線 $y = 0$ に沿って $(0, 0)$ に近づけると 1 に近づく.

以上より極限值は存在しない.

注

- 極限值が存在しないことを示すには, 2通りの近づけ方で異なる値に近づくことを示せばよい.

- 極座標で表したとき, $r \rightarrow 0$ のとき $g(r) \rightarrow 0$ となる r だけの関数を用いて

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq g(r)$$

のような不等式が作れてやっと $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ と結論づけられる. 極座標を用いて

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ を証明するためには上のような不等式を必ず作る.

演習 2

次の関数は点 $(0,0)$ で連続であるか

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)), \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

解 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ を調べる.

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと $r \neq 0$ のとき

$$xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = r^2 \cos \theta \sin \theta \sin \frac{1}{r}$$

であり, $\left| \sin \frac{1}{r} \right| \leq 1$ より

$$\left| xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq r^2$$

$(x,y) \rightarrow (0,0)$ のとき $r \rightarrow 0$ であるから

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

つまり

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

である. よって $(0,0)$ で連続である.