

2025 年度 解析Ⅲ 演習 (担当: 松澤 寛) プリント No.11

学科 (コース)・プログラム _____ 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$ であるとき $\iint_D x dx dy$ を求めよ. 領域 D も図示せよ.
2. $D = \{(x, y) | 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$ であるとき $\iint_D x^2 y dx dy$ を求めよ. 領域 D も図示せよ.
3. $D = \{(x, y) | y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4x\}$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とし, D は (r, θ) で用いて E に表されたとする. E を

$$E = \{(r, \theta) : \dots\dots\}$$

の形で書きなさい.

(3) $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy$ を求めよ. ただし必要に応じて

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots\dots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ 偶数}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots\dots \frac{2}{3} & (n \text{ 奇数}) \end{cases}$$

を用いてもよい.

4. $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とし, D は (r, θ) で用いて E に表されたとする. E を

$$E = \{(r, \theta) : \dots\dots\}$$

の形で書きなさい. (Hint: 接弦定理 or $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$)

(3) 2重積分 $\iint_D (x^2 + y^2)^3 dx dy$ を求めよ. 3で与えた公式, および

$$\int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$$

を用いてよい.

5. 不等式 $0 \leq 2x - y \leq 1, 1 \leq x + y \leq 2$ の表す領域を D とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) 変数変換 $2x - y = u, x + y = v$ を用いて, 次の2重積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x + y)^4 (2x - y)^2 dx dy$$