2025 年度　解析 Ⅲ 演習（担当：松澤　寛）　プリント　No.4

学科（コース）・プログラム＿＿＿＿＿＿＿　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $x = 2t$, $y = t^2 - 1$ のとき $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ.

2. $z = f(x, y)$ は第 2 次偏導関数まで連続，$x = a + ht$, $y = b + kt$ (a, b, h, k は定数) とするとき $\dfrac{dz}{dt}$, $\dfrac{d^2 z}{dt^2}$ を f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を用いて表せ.

3. $z = f(x, y)$ は第 2 次偏導関数まで連続, $x = r\cos\alpha - s\sin\alpha$, $y = r\sin\alpha + s\cos\alpha$ (α は定数) とするとき

(1) z_r, z_s を z_x, z_y, α ($\sin\alpha$ や $\cos\alpha$) を用いて表せ.

(2) z_{rr}, z_{ss} を z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, α ($\sin\alpha$ や $\cos\alpha$) を用いて表せ.

(3) 等式

$$z_{rr} + z_{ss} = z_{xx} + z_{yy}$$

を証明せよ.

4. 2 変数関数 $f(x, y)$ が n 次同次関数であるとは任意の実数 x, y と任意の実数 t に対して $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ が成り立つことである．$f(x, y)$ が x, y について偏微分可能な n 次同次関数であるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y = nf(x, y)$$

が成り立つことを証明せよ.

5. $f(u)$ を u の 1 変数関数で $\mathbb{R}$ で第 2 次導関数まで連続であるとする．c を定数とし，$z = f(x - ct)$ とおく．以下の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ を $f'(\cdots)$, c, x, t のうち必要なものを用いて表せ.

(2) (1) と同様に $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ を計算し，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

が成り立つことを証明せよ．上の等式を**波動方程式**という．xy 平面の曲線 $y = f(x - ct)$ は xy 平面の曲線 $y = f(x)$ が単位時間あたり x 軸方向に c 平行移動する様子を表している.