2025年度　解析Ⅲ演習（担当：松澤　寛）　プリント　No.2

学科（コース）・プログラム__________　学籍番号____________　氏名________________

1. 次の関数の偏導関数，第2次偏導関数を全て求めよ．

(1) $z = x^3y^2 + 3x^2y^2$　　(2) $z = \sin(xy)$

(3) $z = e^{x^2-y^2}$　　(4) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

(5) $z = e^{\frac{y}{x}}$　　(6) $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

2. $z = x^y$ のとき z_x, z_y を求めよ（Hint: $\log z$ を考える）．

3. $H(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ とするとき $\dfrac{\partial H}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ を満たすことを計算で確かめよ．この方程式を**熱方程式**という．

4. 3変数関数 $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ に対して $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を求めよ．

5. 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f_x(0,0)$ を求めよ.（Hint: $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$ でしたね．$f(0,0)=0$ ですが $f(0+h,0) =?$. $h \neq 0$ ですから場合分けの上の式を使う.）

(2) $y \neq 0$ のとき $f_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h}$ を求めよ．
（Hint：$y \neq 0$, $h \neq 0$ だから $f(0+h,y) = f(h,y) =?$, $f(0,y) =?$. $(h,y),(0,y) \neq (0,0)$ ですから場合分けの上の式を使う.）

(3) $f_y(0,0)$ を求めよ.（Hint: (1) と同じ）

(4) $x \neq 0$ のとき $f_y(x,0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x,0+h)-f(x,0)}{h}$ を求めよ.（(2) と同じ）

(5) $f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h}$ を求めよ.（Hint：$f_x(0,0+h) = f_x(0,h)$ は (2) の結果を，$f_x(0,0)$ は (1) の結果を使う）

(6) $f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h}$ を求めよ.（Hint：$f_y(0+h,0) = f_y(h,0)$ は (4) の結果を，$f_y(0,0)$ は (3) の結果を使う）