

2025年度 解析Ⅲ演習(担当:松澤 寛) プリント No.01

学科(コース)・プログラム _____ 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. 次の極限值が存在するかどうかを調べよ. 存在するときにはその極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Hint(3): $y = mx^2$ に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけてみよ. つまり $y = mx^2$ として $\lim_{x \rightarrow 0}$ としてみよ.

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{|x| + |y|} = 0$ を証明せよ.

Hint: (1) $|\sin t| \leq |t|$ がすべての t に対して成り立つ.

(2) 分母の $|x| + |y|$ について $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$ が成り立つことを利用せよ.

3. 1(3) を参考にして次の極限值が存在しないことを証明せよ.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{3x^2 + y^6}$$

4. 次の問いに答えよ.

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\sin x)(\tan y)}{\sin^2 x + \sin^2 y}$ は存在しないことを証明せよ.

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \tan^{-1} \frac{y}{x} = 0$ であることを証明せよ.

Hint (1): 2通りの近づけ方をしてみる.

Hint (2): $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ と $\tan^{-1} \theta$ の値域に注意

5. 次の関数は点 $(0, 0)$ で連続であるかどうか調べよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

$$(3) f(x, y) = \begin{cases} xy \log(x^2 + y^2) & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

(Hint: (3) $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \log r^2 = \lim_{r \rightarrow 0} 2r^2 \log r = ?$ (ロピタル))