

2024年度 解析Ⅲ演習(担当:松澤 寛) プリント No.4

学科(コース)・プログラム _____ 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. $z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$, $x = 2t$, $y = t^2 - 1$ のとき $\frac{dz}{dt}$ を求めよ.
2. $z = f(x, y)$ は第2次偏導関数まで連続, $x = a + ht$, $y = b + kt$ (a, b, h, k は定数) とするとき $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ を $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を用いて表せ.
3. $z = f(x, y)$ は第2次偏導関数まで連続, $x = r \cos \alpha - s \sin \alpha$, $y = r \sin \alpha + s \cos \alpha$ (α は定数) とするとき
 - (1) z_r, z_s を z_x, z_y, α ($\sin \alpha$ や $\cos \alpha$) を用いて表せ.
 - (2) z_{rr}, z_{ss} を $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \alpha$ ($\sin \alpha$ や $\cos \alpha$) を用いて表せ.
 - (3) 等式

$$z_{rr} + z_{ss} = z_{xx} + z_{yy}$$

を証明せよ.

4. 2変数関数 $f(x, y)$ が n 次同次関数であるとは任意の実数 x, y と任意の実数 t に対して $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ が成り立つことである. $f(x, y)$ が x, y について偏微分可能な n 次同次関数であるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = n f(x, y)$$

が成り立つことを証明せよ.

5. $f(u)$ を u の1変数関数で \mathbb{R} で第2次導関数まで連続であるとする. c を定数とし, $z = f(x - ct)$ とおく. 以下の問に答えよ.
 - (1) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial t}$ を $f'(\dots), c, x, t$ のうち必要なものを用いて表せ.
 - (2) (1)と同様に $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ を計算し,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

が成り立つことを証明せよ. 上の等式を**波動方程式**という. xy 平面の曲線 $y = f(x - ct)$ は xy 平面の曲線 $y = f(x)$ が単位時間あたり x 軸方向に c 平行移動する様子を表している.