■原　著■

ヴァイオリンを A 音からチューニングする根拠の理解

青木 孝[1,2]

The Understanding of That Why the Violin is Tuned from A Pitch

Takashi Aoki[1,2]

[1] Department of Mathematics and Physics, Faculty of Science, Kanagawa University, Hiratsuka City, Kanagawa, 259-1293, Japan
[2] To whom correspondence should be addressed. E-mail: u17aok@kanagawa-u.ac.jp

Abstract : The understanding of that why the violin is tuned from A pitch was studied. It was noted that its understanding was made from historical process of the violin.
***Keywords* :** Violin tuning harmony mean tone Pythagoras

序論

報告者は、物理学実験Ⅰの課題の 1 つ「音速の測定とリサージュ図形の観測」実験を担当していた。その実験の導入にあたり、音波の周波数に関連した、音律と音階の物理についても説明していた。学生の数人は、身近な音楽と、身近でない物理との 1 つの結びつきに驚き関心を示す。そこに意義も感じ続けているが、説明をしながらも、「なぜ、A 音からチューニングするのか？」という疑問がいつも付きまとっていた。そこで、調べることにしたわけである。その結果、300 年前には完成形となったヴァイオリン系楽器を A 音からチューニングする根拠について、現代のヴァイオリン系楽器が、歴史上の到達点であるという観点と、音律の変遷を照らし合わせ、その関係性から納得できる理解を得ることができたので報告し、学生への補足とする。

Table 1 Scale at Europe, Japan

ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	(ド)
C	D	E	F	G	A	B	(C)
ハ	ニ	ホ	ヘ	ト	イ	ロ	(ハ)

音階は、ドレミファソラシ (ド) の 7 音からなる。音名は、英米式では、ドを記号 C として、ラの A から始まり一巡する。日本では、Table 1 の下段として対応させる。音域上、中央の C を C4 として、1 オクターブ上の C は C5 と表記する。したがって、A 音は A4 となる。C4 〜 C5 は、なじみ深くハ長調と呼ばれ、近代音楽では基本となっているが、C4 音からではなく、この A4 音を、一般的に、1939 年ロンドン国際会議で決められた 440Hz としてチューニングする。17 世紀から 18 世紀のバッハに代表されるバロック音楽では、A4 音のピッチが 435Hz であったとされ、まさに 1891 年において国際 A4 ピッチは、435Hz と決められていた。時代により、A4 音の周波数は変遷するが、チューニングの基準は音階ラであり、その音名を A としていることに、歴史的必然があることが理解できたので報告する。

方法

倍音の解析

倍音は、マラン・メルセンヌにより、1636 年に発見された。それと同時に、後述の平均律も、ほぼ完璧に記述している。倍音は、1 オクターブが基本となる。C4 と C5 の周波数比は、2 倍となる (2 の倍数系列)。C4 の音に調弦した開放弦長を l とすれば、C5 は弦長を $\frac{l}{2}$ にして弾けばよい。以降、3 倍音、4 倍

音 (2 オクターブ上) 等は、Table 2 となる。2 倍音 C5 と 3 倍音 G5 の周波数比は、$\frac{G5}{C5} = \frac{3}{2}$ で完全 5 度の音程という。C4 の開放弦長を l とし、C5 の弦長を $l5(l5 = \frac{l}{2})$ とすれば、G5 は、弦長を $\frac{2}{3}l5$(3 の倍数系列)$(= \frac{l}{3})$ として弾く音と同じである。

Table 2 Harmonic tone

harm.	1	2	$3(2 \cdot \frac{3}{2})$	4	$5(4 \cdot \frac{5}{4})$	6
tone	C4	C5	G5	C6	E6	G6
leng.	l	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{5}$	$\frac{l}{6}$

また、4 倍音 C6 と 5 倍音 E6 の周波数比は、$\frac{E6}{C6} = \frac{5}{4}$ で、長 3 度の音程という。C6 の開放弦長を $l6(=\frac{l}{4})$ とすれば、E6 は弦長 $\frac{4}{5}l6$(5 の倍数系列) として弾く音と同じになる。これらの周波数比を、弦長で表せば、Table 2 の下段となる。これらの倍音系列の音を、C4 〜 C5 の 1 オクターブ内に対応する音に埋め込めば (G5 は長さを 2 倍にして 1 オクターブ下げて C4 〜 C5 内に入るように調整する)、C4、E4、G4、C5 の周波数比が決まる。倍音系列に基づく音階は、長 3 度 (E4：$\frac{5}{4}$) と完全 5 度 (G4：$\frac{3}{2}$) が調和音となるような音階となる。この音階は、純正律 (Just intonation) と呼ばれ、後で論ずる。ヴァイオリン系楽器では、この純正律の音律で演奏する。

Table 3 Octave tone at Piono

B3	C4	‖	D	‖	E	F	‖	G	‖	A	‖	B	C5	‖	D

ピアノの鍵盤として、C4 音を中心に音階を示せば、Table 3 となる。Table 3 において、ピアノの C4 と D4 の間にある黒鍵盤は、C4 の右隣りにある「‖」で代用し、半音のキィを表わす。D4 以降の表記も同様とする。C4 の半音上がった音階を $C4^{\sharp}$ と表し、D4 の半音下がった音階を $D4^{\flat}$ と表す。この $C4^{\sharp}$ と $D4^{\flat}$ は、周波数が音楽的には違う音であるが、ピアノでは、同じ周波数の音として 1 つのキィに割り振り演奏する。西欧近代音楽のピアノでは、1 度のチューニングで転調の保証をするために、半音周波数比を一定にし、♯＝♭とするために、平均律というチューニングを使用する。平均律は、半音を含む、C4, $C^{\sharp}$, D, $D^{\sharp}$, E, F, $F^{\sharp}$, G, $G^{\sharp}$, A, $A^{\sharp}$, B, (C5) の 12 音階で成り立っている。半音比は一定なので、全音比も一定となり、半音は全音の完全に半分となる。調和を基本とする純正律では、全音比は 2 種類あり、大全音と小全音がある。半音は全音の半分ではなく、♯と♭の比は違う。このことが、純正律の音階では、1 度のチューニングによる転調を不可能にし、音階が、どの音名からチューニングするかに根元的に関係する。これが、本報告の主題である。

この報告は、300 年前に完成形となった現代西欧ヴァイオリン系楽器の調和律による調弦が、歴史上の到達点であるという観点と、ピタゴラス律、調和律、平均律それぞれの音律の音楽的変遷を照らし合わせるという方法で、現代ヴァイオリン系楽器を A 音からチューニングする根拠について、納得できる理解を与えることを目的とする。チューニングする音律と楽器は密接に関連することに注目する。

ピアノは、平均律の音階を採用しており、そのチューニング方法は、対比ゆえ付録 1 に示す。また、同時に、ギターのフレット間隔も平均律で調整されており、両楽器とも転調 (コード変換) が保証されている点にもふれる。次に、平均律について説明する。

平均律とピタゴラス音律の解析

平均律は、1585 年にシモン・ステヴィンが 1 オクターブの中に存在する「半音」をすべて同等な比：$\sqrt[12]{2}$ で算出する平均律 (Mean temperament) を西欧世界で初めて導出した [1)]。1 オクターブを周波数比 2 として、半音比：$\sqrt[12]{2} \approx 1.059463094$ を一定値として音階を構成する (Table 4)。♯ (半音あげる)、♭ (半音下げる) は、同音となる。

Table 4 Mean temperament tone

		C-tone	A-tone
1	1.0	C	A
2	$\sqrt[12]{2} \approx 1.0595$	C ♯	A ♯
3	$(\sqrt[12]{2})^2 \approx 1.1225$	D	B
4	$(\sqrt[12]{2})^3 \approx 1.1892$	D ♯	C
5	$(\sqrt[12]{2})^4 \approx 1.2599$	E	C ♯
6	$(\sqrt[12]{2})^5 \approx 1.3348$	F	D
7	$(\sqrt[12]{2})^6 \approx 1.4142$	F ♯	D ♯
8	$(\sqrt[12]{2})^7 \approx 1.4983$	G	E
9	$(\sqrt[12]{2})^8 \approx 1.5874$	G ♯	F
10	$(\sqrt[12]{2})^9 \approx 1.6818$	A	F ♯
11	$(\sqrt[12]{2})^{10} \approx 1.7818$	A ♯	G
12	$(\sqrt[12]{2})^{11} \approx 1.8877$	B	G ♯
13	$(\sqrt[12]{2})^{12} = 2.0$	C	A

平均律では、オクターブ以外は協和音となり得る音程は存在しないが、Table 4 に見るように、1 度のチューニングで転調が保証される。

平均律から約 2000 年さかのぼり、ピタゴラスが、第 3 倍音の完全 5 度の音程を持つ周波数比で $\frac{3}{2}$ となる関係 (開放弦長の半分がオクターブ、開放弦長の $\frac{2}{3}$ が完全 5 度) だけを使って、ピタゴラスの音律

を作っている。例えば、C 調のドから音階を作るとすれば、C(ド) が周波数 1 とすると、C$\cdot\frac{3}{2}=1.5$(C の弦長を $\frac{2}{3}$ にすること) は、完全 5 度上の G の周波数になる。平均律の Table 4 と比べると、G(ソ) は、8 番目の音：$(\sqrt[12]{2})^7\approx\frac{3}{2}$ に対応する。さらに、この G に対して完全 5 度上の音は、$(\frac{3}{2})^2=2.25$ となり、C の 1 オクターブ上の音域の D(レ) となるので、同じ音域に収めるために、オクターブ下げて、$(\frac{3}{2})^2(\frac{1}{2})=1.125$ とする。このように、完全 5 度 $(\frac{3}{2})$ とオクターブ下げ $(\frac{1}{2})$ の関係だけで音階を作っていくピタゴラス律では、C から始めて繰り返す 3 番目の音に、D(レ) が対応する (Table 5)。C から順に、C、G、D と、D 以降も完全 5 度の関係を芋づる式に 12 回繰り返すと、Table 5 の順のように、13 番目の音として、1 オクターブ上の C が出てくる。ちょうど、13 番目の音が、1 オクターブ比の 2 に近いので、ここで 12 音階を打ち切ったのである。

$2.0273\approx(\frac{3}{2})^{12}(\frac{1}{2})^6\approx 2$

しかし、この 2 と 2.0273 の比率の差 (ピタゴラスのコンマという) が、正確に音階を閉じないために、転調できない等の弊害を生む。C から始めるピタゴラス音律では、FC の音程比は、原理的に $\frac{3}{2}$ にならない。

Table 5 Pythagoras tone

		C-tone
1	1.0	C
2	$(\frac{3}{2})=1.5$	G
3	$(\frac{3}{2})^2(\frac{1}{2})=\frac{9}{8}=1.125$	D
4	$(\frac{3}{2})^3(\frac{1}{2})=\frac{27}{16}=1.6875$	A
5	$(\frac{3}{2})^4(\frac{1}{2})^2=\frac{81}{64}=1.265625$	E
6	$(\frac{3}{2})^5(\frac{1}{2})^2=\frac{243}{128}=1.8984375$	B
7	$(\frac{3}{2})^6(\frac{1}{2})^3=\frac{729}{512}=1.423828125$	F ♯
8	$(\frac{3}{2})^7(\frac{1}{2})^4=\frac{2187}{2048}=1.067871093$	C ♯
9	$(\frac{3}{2})^8(\frac{1}{2})^4=\frac{6561}{4096}=1.60180664$	G ♯
10	$(\frac{3}{2})^9(\frac{1}{2})^5=\frac{19683}{16384}=1.20135498$	D ♯
11	$(\frac{3}{2})^{10}(\frac{1}{2})^5=\frac{59049}{32768}=1.80203247$	A ♯
12	$(\frac{3}{2})^{11}(\frac{1}{2})^6=\frac{177147}{131072}=1.35152435$	F
13	$(\frac{3}{2})^{12}(\frac{1}{2})^6=\frac{531441}{262144}=2.02728653$	C

ピタゴラス音律において、Table 5 のように、C から始めて芋づる式に作る最初の 5 音：C、G、D、A、E だけで音階を打ち止めにしても楽曲は成立する。日本では俗に、この 5 音では、第 4(ヨん) 音と第 7(ナな) 音が抜けるので、「ヨナ抜き 5 音階」と呼ばれるが、この 5 音階は、世界に共通する音階の 1 つになっている。「赤とんぼ (中山晋平作曲)」、スコットランド民謡に基づく「蛍の光」、「アメイジング・グレイス」、ドヴォルザークの第 2 楽章主部：新世界より「遠き山に日は落ちて (日本)」など多くの曲がこの 5 音階を用いて作曲されている。

Table 5 によれば、芋づる式に完全 5 度 $(\frac{3}{2})$ の関係から、E の次に 6 番目「B」、7 番目「F ♯」が出てくる。この、C,D,E,F ♯,G,A,B の音階は実は、G,A,B,C,D,E,F ♯,(G) のト長調 (長音階) の音階になっている。これを、C 音から見た場合には、7 番目の音階「F ♯」の音程 $\frac{729}{512}\approx 1.4238$が、他の 6 音と比べ、純正音程からずれるので、次の、

G,A,B,C　,D,E,F ♯,(G) ：ト長調
C,D,E,F ♯,G,A,B　,(C)
C,D,E,F　,G,A,B　,(C)

による対応のように、ハ長調の始めの C 音から 4 度上、オクターブ上からは 5 度下の F$(2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\approx 1.3333)$ で、F ♯を置き換える。元のト長調の GC 間は、完全 4 度 $\frac{4}{3}\approx 1.3333$ になっている。それに合わせ、この 7 音階：C,D,E,F,G,A,B,(C) として一部再構成した音律によって、単旋律のグレゴリオ聖歌 (9 〜 10 世紀) や中世の音楽は作曲されたとされる。C から始めたピタゴラス音律の本来の F は、Table 5 の 12 番目に、$\frac{177147}{131072}\approx 1.3515$ として出てくる。

Table 5 の F を再構成した 7 音で並び替えると、Table 6 となる。この Table 6 で、オクターブ上の C は、周波数比 2 としてしまい、ピタゴラスのコンマのつけを F に押し付け 7 音とする。これが、ピタゴラス 7 音階の正体である。

Table 6 Reduced Pythagoras tone (7 tone)

		C-tone	A-tone	
1	1	C	A	1
2	$\frac{9}{8}$	D	B	$\frac{9}{8}$
3	$\frac{81}{64}$	E	C	$\frac{32}{27}$
4	$\frac{4}{3}$	F	D	$\frac{4}{3}$
5	$\frac{3}{2}$	G	E	$\frac{3}{2}$
6	$\frac{27}{16}$	A	F	$\frac{128}{81}$
7	$\frac{243}{128}$	B	G	$\frac{16}{9}$
8	2	C	A	2

この Table 6 の 7 音階は、音程完全 5 度 $\frac{3}{2}$ を基に音階を作っているので、CG 間は音程 $\frac{3}{2}$、DA 間も $\frac{27}{16}\cdot\frac{8}{9}=\frac{3}{2}$ と正しい音程となっている。

このCから始まる：

C,D,E,F,G,A,B,(C)

の自然長音階 C(ハ) 長調の音列は、そのまま、A から始まる：

A,B,C,D,E,F,G,(A)

の自然短音階 A(イ) 短調の音階になっている。実

は、グレゴリオ聖歌 (9〜10 世紀) など中世の音楽は、この 7 音の C(ハ) 長調ではなく、基音を A とした A(イ) 短調の音階で作られている。この基音が C(ハ) ではなく、A(イ) 短調の音階であることが、A からヴァイオリンのチューニングを始める理由を考える上で、「1 つの着眼点」である。A 短調から、感じのよい C 長調へは、始めの音を変えれば良いだけなので、すぐ行き着く。

結果と討論

和音の解析

全音 (例えば CD 間) は、半音が 2 つ分 (半音は全音の半分ではない) の音程、全音と全音で長 3 度 (例えば CE 間) の音程、全音と半音で短 3 度 (例えば AC 間) の音程となる。このとき、長 3 度と短 3 度で長 3 和音 (例えば CEG 間)、短 3 度と長 3 度で短 3 和音 (例えば ACE 間) となる。根音 (基音) からの主和音が長 3 和音の音階が長調 (長音階例えば C 長調) で、一方、根音からの主和音が短和音の音階が短調 (短音階例えば A 短調) と呼ばれる。したがい、長音階例えば C 長調は、

C(全音)D(全)E(半)F(全)G(全)A(全)B(半)C、

短音階例えば A 短調は、

A(全音)B(半)C(全)D(全)E(半)F(全)G(全)A

となる。

ピタゴラス音律では、完全 5 度 (長 3 度と短 3 度) を、単純な周波数比 $\frac{3}{2}$ として音階を作る。この完全 5 度の音程のある 2 音 (例えば基音 A と 5 度上 E) の開放弦を同程度の強さで弾くと、開放弦よりは弱い響きだが、両者の振動数の差に相当する音程 (「差音」) として、1 オクターブ下の基音 A の音が聞こえてくる。A の周波数を f として、

$$\mathrm{E} - \mathrm{A} = \frac{3}{2}\mathrm{f} - \frac{2}{2}\mathrm{f} = \frac{1}{2}\mathrm{f} \tag{0.1}$$

(A の 1 オクターブ下の差音)

となる。この 2 音：E と A がピッタリ合っていないと、ずれの周波数に相当するうなり (beat) を生じ、「ワンワンワン」という響きが聞こえる。この完全 5 度調弦が、ピタリと合えば (基音 A に基づき E をチューニングできれば)、式 (0.1) から、基音 A を、さらに 1 オクターブ下の基音 A 音が支えて、ヴァイオリンの楽器全体が、「裏板から良く鳴る」ようになる。これが「和音」の本質である [2)]。A(sin(x)) と 5 度上 E(sin(1.5x)) の 2 音の差音 (sin(1.5x) − sin(x))：E − A を表わすと、この差音の波形は、A 音の 1 オクターブ下の周期波形 (元の A の波長の 2 倍) になる。

純正律の解析

音の周波数比が単純な数比であると、調和音を生む。完全 5 度の音程を持つ 2 和音は、基音 (根音) の 1 オクターブ下の差音低音がしっかりと響き全体を支え、充実した「協和音」を作り出す。これが、西欧近代音楽の和音、いわゆる調和音 (harmony) の本質である。

楽曲が、グレゴリオ聖歌のような、単旋律のモノフォニーから、多声部合唱 (ポリフォニー：15〜16 世紀) に移行するにしたがい、長 3 度 (例えば CE 間) のピタゴラス音律の周波数比：$\frac{81}{64} \approx 1.2656$ を単純な数比：$\frac{5}{4} = 1.25$ に置き換え、調和音 (harmony) に重きをおく音階に再構成されるようになる。これに基づく音階を、純正律と呼ぶ。この再構成により、純正律の長 3 度は、ピタゴラス音律に比べ、音程はかなり狭くなり、この差をシントニック・コンマと言う。周波数比 $\frac{5}{4}$ は、4 倍音 (C6) と 5 倍音 (E6) との周波数比に相当し、C4 開放弦長の $\frac{4}{5}$ 弦長が、純正律の長 3 度音程 E4 の弦長に当たる。

長 3 度 (例えば C と E) の音程の周波数比を $\frac{5}{4}$ とすると、2 音の差音は、C の周波数を f とすれば、

$$\mathrm{E} - \mathrm{C} = \frac{5}{4}\mathrm{f} - \frac{4}{4}\mathrm{f} = \frac{1}{4}\mathrm{f} \tag{0.2}$$

(A の 2 オクターブ下の差音)

となり、完全 5 度の 2 音の時の 1 オクターブ下の基音よりさらに 1 オクターブ下の、基音の 2 オクターブ下の低音差音が基音を支え、長 3 度の和音は、さらにもっと良く響く充実した協和音が得られる。C(sin(x)) と長 3 度上 E(sin(1.25x)) の 2 音の差音 (sin(1.25x) − sin(x))：E − C を表わすと、この差音の波形は、C 音の 2 オクターブ下の周期波形 (元の C の波長の 4 倍) になる。

あわせて単純な周波数の比ゆえに、その差音 (Combination tone) が、基音のオクターブ下の低音差音となり、基音の響き全体を支え、良く響く充実した「協和音」が得られる。この純正律と差音のメカニズム：これが西欧近代音楽の 3 和音 (調和音) の本質である。3 和音 (例えば C,E,G) の差音も、長 3 度の 2 和音と同様に、基音 (根音)：f の 2 オクターブ下：$\frac{\mathrm{f}}{4}$ の周期波形となる。

ここで、和音の本質である、ド (C4：f) とソ (G4：$\frac{3\mathrm{f}}{2}$) の 1 オクターブ下の差音 ($\frac{\mathrm{f}}{2}$) と、ドの第 3 倍音 (G5：1 オクターブ上＋完全 5 度上) との関係、または、ド (C4：f) とミ (E4：$\frac{5\mathrm{f}}{4}$) の 2 オクターブ下の差音 ($\frac{\mathrm{f}}{4}$) と、ドの第 5 倍音 (E6：2 オクターブ上＋長 3 度上) との関係について説明する。

まず、ド (C4 開放弦) とソ (G4 開放弦) の完全 5 度の和音では、基音 C4 と基音 G4 に対して、それぞれ Table 7 の倍音系列をとり、C4 に対しては第 3 倍音、G4 に対しては第 2 倍音に当たる：G5 の共有倍音同志が協和する (うならない)。C4 と G4 の完全 5 度を持つ 2 弦のチューニングが、途上で未完の時は、この G5 の共有倍音同志がうなるわけである。チューニング完成時には、差音として、基音 C4 の 1 オクターブ下の C3 が協和音として鳴る。これはちょうど、Table 7 下段のように、協和音である差音 C3 を基音と考えたときの、第 2、第 3 倍音が、C4、G4 となるような関係になるのである。

このとき、基音 C4 に対して、同じ開放弦 1 音に対し、振幅を $\frac{1}{3}$ にした 3 倍音：G5 を加えた、次に示す合成音 (z)：

$$(0.3) \quad z = \mathrm{C4} - \frac{1}{3}\mathrm{G5} = \cos(\mathrm{t}) - (\frac{1}{3})\cos3\mathrm{t}$$

の周期は、基音と同じ C4 の矩形波形の音色になる。

Table 7 Harmonic tone on Dyad chord(G/C)

	C4		C5	G5	C6		
		G4		G5		D6	G6
(C3)	C4	G4	C5				

次に、ド (C4) とミ (E4) の長 3 度の 2 和音について解析する。基音 C4 に対しては、倍音が 1,2,3,4,5,6 倍音に対して、C4,C5,G5,C6,E6,G6 の音名に対応する。基音 E4 についても同様に、Table 8 のような、それぞれの倍音系列を取り、E6(C4 については第 5 倍音、E4 については第 4 倍音) の共有倍音同志が協和する (うならない)。C4 と E4 の長 3 度を持つ 2 弦の、チューニングが途上で未完の時は、この E6 の共有倍音同志がうなるわけである。。完全 5 度の場合の協和倍音 G5(C4 の 3 倍音) よりも、長 3 度では、より高次の E6(C4 の 5 倍音) の倍音同志が協和する。チューニング完成時は、差音として、基音 C4 の 2 オクターブ下の C2 が協和音として鳴る。これはちょうど、G/C 和音の Table 7 下段の時と同様に、協和音である差音 C2 を基音と考えたときの、第 4、第 5 倍音が、C4、E4 となるような関係になるのである。

このとき、基音 C4 の開放弦に対して、振幅の小さい $\frac{1}{3}$3 倍音 (G5) と $\frac{1}{5}$5 倍音 (E6) を加えた合成音 (z)：

$$(0.4) \quad \mathrm{z} = \mathrm{C4} - \frac{1}{3}\mathrm{G5} + \frac{1}{5}\mathrm{E6} = \cos(\mathrm{t}) - (\frac{1}{3})\cos3\mathrm{t} + (\frac{1}{5})\cos5\mathrm{t}$$

の周期は、C4 の周期と同じになる。この倍音の重ね合わせが、楽器の音色の正体である。C4 の弦を弾けば、各倍音が開放弦より弱い響き (小さい振幅) であるが固有振動として混ざり、その構成比が音色の違いとして聞こえる。たとえば、木管楽器の 1 種クラリネットの音の波形は、合成音：式 (0.4) のいわゆる矩形波に近い波形であることが知られている。

Table 8 Harmonic tone on Dyad chord(E/C)

C4		C5		G5		C6	E6	G6
	E4		E5		B5		E6	

クラリネットは、全長のほとんどを占める管体の太さが、ほとんど一定であり、さらに、マウスピースの反対側が閉管していることが、音色に独特な音色を生む。音色に関係する倍音は、マウスピースの反対側が閉管しているために、奇数倍音だけが現れるのである。各々の倍音の量と発音のタイミング、長さ等の組み合わせによって、楽器特有の音色として表せる。

ドミソ (C4,E4,G4) の 3 和音は、差音として、基音 (C4) の 2 オクターブ下の C2 が協和音となる。これもちょうど、Table 7 下段の (C3) の場合と同様に、協和音である差音 C2 を基音としたときの、第 4、第 5、第 6 倍音が、C4、E4、G4 となるような関係になっているのである。

C 調系の解析

C 長調系列の Table 9 で、音名間の数字は、音名間の周波数比を表わす。ピタゴラス音律では、C 系において DE 間の全音比は、$\frac{9}{8}$ となる。EF、BC 間は半音で、他は全音となっている。Table 9 右欄のように、長 3 度 (周波数比が $\frac{5}{4}$) の調和音を考えた C 系列の純正律を作る。その手順を示す。

(1) ピタゴラス音律の音階を、C から芋づる式に完全 5 度 ($\frac{3}{2}$) の関係で 7 音作る。オクターブ上の C は周波数比 2 とする。

(2) 第 7 番目にできる F ♯を、オクターブ上の C から 5 度下 ($\frac{2}{3}$) の F(周波数比では $\frac{4}{3}$) に置き換えて、7 番目で打ち切り 7 音を再構成し、広い意味でのピタゴラス音律とする。

(3) C から始めて、主要 3 和音の根音：C、F、G に対して長 3 度の音：それぞれ、

E(C→E)、A(F→A)、B(G→B)

を周波数比 $\frac{5}{4}$ に再構成する。この再構成により、ピタゴラス音律から純正律へ、次のようになる (Table 9)。

E：$\frac{81}{64} \to \frac{5}{4}$

A：$\frac{27}{16} \to \frac{5}{3}$

B：$\frac{243}{128} \to \frac{15}{8}$

Table 9 C series on Octave

	Pythagoras	ratio	Harmony	ratio
C	1		1	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$
D	$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$
E	$\frac{81}{64}$		$\frac{5}{4}$	
		$\frac{256}{243}$		$\frac{16}{15}$
F	$\frac{4}{3}$		$\frac{4}{3}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$
G	$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$
A	$\frac{27}{16}$		$\frac{5}{3}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$
B	$\frac{243}{128}$		$\frac{15}{8}$	
		$\frac{256}{243}$		$\frac{16}{15}$
(C)	2		2	

この (3) の純正律による再構成により、ピタゴラス音律では全音比がすべて同じ比率 $\frac{9}{8}$、半音比も同じ $\frac{256}{243}$ であったが、純正律では、CD 間の比 $\frac{9}{8}$ のような「大全音」と、DE 間の比 $\frac{10}{9}$ のような「小全音」の 2 種類に全音が分かれてしまう。純正律の半音は、ピタゴラス音律の比 $\frac{256}{243}$ から比 $\frac{16}{15}$ となり、「全音階的半音」という。

この純正律で、全音が 2 種類できてしまうことが、転調を保証しないばかりか、音程に関して重大な問題を引き起こす。この影響で、C から始めたピタゴラス音律では、CG 間、DA 間、EB 間、FC 間すべてにおいて完全 5 度比 ($\frac{3}{2}$) の音程になっているが、純正律では、このうち、DA 間だけ、完全 5 度音程：$\frac{3}{2}$ とならない。

$$(0.5) \quad DA\,間 = \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{27} \approx 1.4815 \neq \frac{3}{2}$$

これは、純正律では、

長 3 度＝大全音＋小全音

短 3 度＝大全音＋全音階的半音

完全 5 度＝長 3 度＋短 3 度＝大全音＋小全音＋大全音＋全音階的半音

とならねばならないが、C から始めた C 系列の純正律の DA 間の比だけは、

DA 間＝大全音＋小全音＋「小全音 (DE 間の違い)」＋全音階的半音

となってしまうために、完全 5 度：$\frac{3}{2}$ とならない。A 音から楽器をチューニングする理由を考える上で、この点に注目する。

Table 10 A series on Octave

	Pythagoras	ratio	Harmony	ratio
C	$\frac{16}{27}$		$\frac{3}{5}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$
D	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$
E	$\frac{3}{4}$		$\frac{3}{4}$	
		$\frac{256}{243}$		$\frac{16}{15}$
F	$\frac{64}{81}$		$\frac{4}{5}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$
G	$\frac{8}{9}$		$\frac{9}{10}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$
A	1		1	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$
B	$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$	
		$\frac{256}{243}$		$\frac{16}{15}$
(C)	$\frac{32}{27}$		$\frac{6}{5}$	

ここで次に、Table 9 の C 系列を、グレゴリオ聖歌の音階に習い (着眼点 1)、A を基音として、A から始まる A 系列に作り直してみる。ピタゴラス音律部分は C 系列の場合と全く変わらず、C 系列の手順 (3) に相当する A 系列の純正律部分は、Table 10 の右欄のように変わる。

Table 10 において、表示上は C 系列 Table 9 と同じにするが、A から始めて、主要 3 和音の根音、A、D、E に対して短 3 度 (A 短調) の音程として、

C(A→C)、F(D→F)、G(E→G)

を周波数比 $\frac{6}{5}$ に再構成する。この再構成により、ピタゴラス音律から純正律へ、次のようになる (Table 10)。

C：$\frac{32}{27} \to \frac{6}{5}$

F：$\frac{64}{81} \to \frac{4}{5}$

G：$\frac{8}{9} \to \frac{9}{10}$

となる。これにつれ、1 オクターブ下の C も、

C：$\frac{16}{27} \to \frac{3}{5}$

となる。短 3 度は、「全音階的半音＋大全音」で、周波数比は、$\frac{16}{15} \cdot \frac{9}{8} = \frac{6}{5}$ となる。A 系列純正律の再構成により、C 系列と同様に、「大全音 $\frac{9}{8}$」と、「小全音 $\frac{10}{9}$」に分かれるが、

C 系列で、CD 間：大全音＝ $\frac{9}{8}$

C 系列で、DE 間：小全音＝ $\frac{10}{9}$

であったものが、A から始まる、

A 系列で、CD 間：小全音＝ $\frac{10}{9}$

A 系列で、DE 間：大全音＝ $\frac{9}{8}$

と、同じ 2 音間の音程でありながら変更される。純正律は、1 つのチューニングで転調ができないわけである。

このとき、変更によって、A から始めた純正律では、1 オクターブ内に収まる：

CG 間、DA 間、EB 間、FC 間すべてが完全 5 度になり、C から始めた純正律では、

DA 間 $\neq \frac{3}{2}$(完全 5 度でない)

であったものが、A 系列では純正律においても、完全 5 度となる。この点が、チューニングを A 音から始める理由を考える上での「着眼点 2」となる。

ヴァイオリン系楽器の調弦

ストラディバリウス等に代表されるヴァイオリンは、純正律が確立していた中世と同時期：17 世紀後半から 18 世紀に完成形を見た。ヴァイオリンは、音が高い方から、1、2、3、4 弦と言い、高い第 1 弦から順に、E、A、D、G の音に、第 2 弦の A 音のピッチを基準に、すべて完全 5 度の音程を基本に、A(2 弦)、D(3 弦)、G(4 弦)、E(1 弦) の弦の順にチューニングする。チューニング手順は、以下になる (Table 11)。

(1) まず、2 弦を A4 のピッチ：通常は 440Hz に合わせる。

(2) 3 弦：D4 が、2 弦：A4 を基準に、完全 5 度「下」になるように、差音である基音 D4 の 1 オクターブ下の音が弱く響くようにチューニングする。

(3) 4 弦：G3 が、3 弦：D4 を基準に、完全 5 度「下」になるように、差音である基音 G3 の 1 オクターブ下の音が弱く響くようにチューニングする。

(4) 1 弦：E5 が、2 弦：A4 を基準に、完全 5 度「上」になるように、差音に注意してチューニングする。

Table 11 Tuning of a Violin

St.	Violin		T	u	n	e
1H	E5：A4×$(\frac{3}{2})$	5UP				4
2	A4：440Hz		1			
3	D4：A4×$(\frac{2}{3})$	5DWN		2		
4L	G3：A4×$(\frac{2}{3})^2$	5DWN			3	

ヴァイオリンには、フレットがないので、演奏者が耳により、弦を押さえる位置を指位置で調節して、純正律で弾く。ピアノとギターは、平均律でチューニングするので、転調が保証される。ギターのフレットは、弦長が、平均律になるように、純正律からずらして切ってある。ピアノの鍵盤では同音となるが、ヴァイオリンなどの純正律では、C ♯と B ♭は別の音で、指位置で弾き別ける (付録 1)。

少し大きめのビオラは、4 弦を持ち、楽曲の低音域をカバーするために、ヴァイオリン同様に完全 5 度の音程を基本に、ヴァイオリンの基準ピッチとする第 2 弦：A4(440Hz) を、ビオラの高い方の第 1 弦：A4 として、すべて低くなる 2、3、4 弦を、順に完全 5 度下になるように、2 弦：D4、3 弦：G3、4 弦：C3 としてチューニングする。

やや大きめのチェロは、4 弦を持ち、さらにビオラの 1 オクターブ下の低音域をカバーするために、ヴァイオリンの第 2 弦の基準ピッチ A4 ＝ 440Hz の 1 オクターブ下の A3 ＝ 220Hz を、高い方の第 1 弦：A3 として、ビオラと同様にすべて低くなる 2、3、4 弦を、順に完全 5 度下になるように、2 弦：D3、3 弦：G2、4 弦：C2 とチューニングする。これら、ビオラ、チェロの各弦の音域を整理すると、Table 12 となる。Table 12 の左端は、比較のために、ヴァイオリンの 4 弦の音域を示す。

Table 12 Tuning of a Viola, Cello

V.	St.	Viola	St.	Cello
1H				
2	1H	A4:440Hz		
3	2	D4:A4×$(\frac{2}{3})$		
			1H	A3:220Hz
4L	3	G3:A4×$(\frac{2}{3})^2$		
			2	D3:A3×$(\frac{2}{3})$
	4L	C3:A4×$(\frac{2}{3})^3$		
			3	G2:A3×$(\frac{2}{3})^2$
			4L	C2:A3×$(\frac{2}{3})^3$

300 年前には完成形だった、ヴァイオリン。ビオラ、チェロは、その調弦に純正律の歴史を残している。ヴァイオリンでは、2 弦：A4 ピッチを基準にして、完全 5 度の音程によって、低い側の A の下は、D、G として、高い側の A の上は、E としてチューニングしていることが分かる。先の Table 5 に見るような、完全 5 度音程によるピタゴラス音階の作成過程は、C から芋づる式に始まったのではなく、A から始まり、下の低い方に、D、G、C とつくり止まり、反転して、基準 A から上の高い方に、E という順番に作られたとされる。まさにこれは、ヴァイオリン系楽器のチューニング手順と同一である。チューニング手順と、調弦音に、300 年の音律の歴史が残っているのである。このことが、A からヴァ

イオリン系楽器をチューニングする理由の「着眼点3」となる。これですべての 3 つの着眼点が整った。

Table 13 Tuning of a Contrabass

C.	St.	Contrabass	St.	Cello$\times(\frac{1}{2})$
			1H	A2:110Hz
3	1H	G2:A1$\times(\frac{4}{3})^2$		
	2	D2:A1$\times(\frac{4}{3})$	2	D2:A2$\times(\frac{2}{3})$
4L				
	3	A1:55Hz		
			3	G1:A2$\times(\frac{2}{3})^2$
	4L	E1:A1$\times(\frac{3}{4})$		
			4L	C1:A2$\times(\frac{2}{3})^3$

一方、コントラバスは、その楽器の完成形が、ヴァイオリン系楽器に比べかなり遅く、19 世紀になってほぼ固まり、ヴァイオリン系楽器とは異なる 4 本弦の調弦音となっている。コントラバスでは、高い方から 1、2、3、4 弦とし、第 1 弦をチェロの 3 弦：G2 と同音にして、1 弦：G2、2 弦：D2、3 弦：A1、4 弦：E1 と、完全 5 度音程ではなく、すべて 4 度音程で調弦する (Table 13、左端はチェロの調弦)。これは、ギターの、高い方の 3、4、5、6 弦の 2 オクターブ高さが違うが、3 弦：G4、4 弦：D4、5 弦：A3、6 弦：E3 と同じ調弦音の構成となっている。

4 度音程 ($\frac{4}{3}$) チューニングは、完全 5 度音程チューニングとは異なる以下の手順となる。まず、最初に、3 弦：A1 を基準ピッチ A4(440Hz) の 3 オクターブ下 (開放弦の 8 等分点：55Hz) に合わせ、順次、3 弦：A1 を基準に、高い方へ、2 弦：D2 を合わせ、2 弦：D2 を基準に 1 弦：G2 を合わせ、戻って、3 弦：A1 を基準に低い方の 4 弦：E1 を、すべて 4 度音程で調弦する。この 4 度音程 (和音ではない) の調弦は、Table 14 のように、高い方の 2 弦：D2 の第 3 倍音 (1 オクターブと完全 5 度上)：A3 が、低い方の 3 弦：A1 の第 4 倍音の A3(2 オクターブ上) と協和し、うなりのないように調弦する。このとき、フラジオレット (ハーモニクス) を利用する場合もある。フラジオレットは、弦楽器で倍音を出す演奏技法とその音を指し、弦を指板にまで押さえつけず、軽く触れる程度で弾くと、触れた箇所を節とする倍音だけが鳴ることを使う奏法である。合わせる高い方の 2 弦：D2 の 3 等分点、すなわち開放弦の第 3 倍音：開放弦と 1 オクターブと完全 5 度上の音がでる位置を軽く押さえ (触れ)、フラジオレットを出し、3 弦：A1 の第 4 倍音 (2 オクターブ上) と合わせて、2 弦：D2 をチューニングする。

Table 14 Tuning on D/A with Contrabass

A1		A2		E3	A3
	D2		D3		A3

ここで、コントラバスの調弦を、4 度音程調弦に、ヴァイオリン系 (5 度音程) と変えた理由として、次のことが考えられている。チェロに比べかなりサイズの大きいコントラバスは、チェロの音域より 1 オクターブ下の音域をカバーする、5 度音程の 4 本調弦：高い 1 弦から、1 弦：A2、2 弦：D2、3 弦：G1、4 弦：C1 の構成が考えられていたが (Table 13 の右欄)、サイズが大きくなるために、5 度音程では、弦の音程を取る指幅が大きくなり演奏できない。できたとしても、当時はガット (羊の腸でできている) 弦しかなく、それで一番低い 4 弦：C1 弦を作ろうとすると、人間の親指より太くなってしまうので、C1 弦を作ることができなかった。そこで、最低弦の音を G1、完全 5 度ずつ上がって、D2、A2 としたチューニングの 3 弦コントラバスの歴史が始まった。その後、18 世紀から徐々に巻線弦が発明され、ガット弦またはナイロン弦に金属線を巻き付け補強して弦径を細くできるようになり、しだいに、高い方の 1 弦を G2(チェロの 3 弦) から始める 4 度音程の、全体音域を狭めた、4 弦コントラバスに変わった (高い方から 1 弦：G2、D2、A1、E1：Table 13)。さらに巻線の開発を加え、完全 5 度チューニングに最適な弦を求めて、ジャズ・ベーシストのレッド・ミッチェル (Red Mitchell:1927-1992) は、この歴史をふまえ、あえてチェロより 1 オクターブ音域を下げて完全 5 度調弦した、4 本弦：高い方から 1 弦：A2、D2、G1、C1(Table 13 の右欄) で、コントラバスをチューニングして演奏した [3]。したがって、弦楽器の調弦の基本は、完全 5 度チューニングのヴァイオリン系に代表されると考えてよい。

今ここで、ヴァイオリン系楽器の調弦に、300 年前の純正律の音律と音階の名残が残る、すなわち、調弦は音律そのものを反映したものと考える (着眼点 3)。また、近代は長調が基本となり、C を基本に自然長音階を考えるが (音域表示も C を基準)、ヴァイオリンが完成形となった 300 年前の中世では、A 音から始まる自然短音階 (短調) を基本にしていたことを思い出す (着眼点 1)。一方、Table 9(C 系列) と Table 10(A 系列) によれば、C から始まるピタゴラス音律では、DA 間の音程は完全 5 度：DA $= \frac{3}{2}$ であるが、C から始まる純正律では、オクターブ内の DA 間の音程が完全 5 度にならない：DA$\neq \frac{3}{2}$。A から始まる自然短音階のオクターブ内にある DA 間

の音程は、A から始まるピタゴラス音律でも、A から始まる純正律でも、DA 間の音程は完全 5 度になる (Table 15)。現に、ヴァイオリン、ビオラ、チェロでも現れる、オクターブ内の D 弦と A 弦間 (DA 間音程) は、完全 5 度音程でチューニングするので、C 系で始まる自然長音階の純正律を反映した楽器の調弦ではあり得ない。A 系から始まる自然短音階の純正律でなければならないし、現に調弦は、A4 ピッチを基準にして、A から始めて、他 3 本をチューニングしていく (着眼点 2)。

Table 15 DA interval by Tuning

	Pythagoras	Harmony
C-tone	DA= $\frac{3}{2}$	DA≠ $\frac{3}{2}$
A-tone	DA= $\frac{3}{2}$	DA= $\frac{3}{2}$

ここまで、理解した上で、ピタゴラス音律の音階を、完全 5 度音程 $\frac{3}{2}$ で、C から始めて芋づる式に導出した Table 5 を再考する。実は、この表は、C から高音側に始めるのではなく、A を始めとして、A から低音側に 3 つ、$(\frac{2}{3})$、$(\frac{2}{3})^2$、$(\frac{2}{3})^3$ として、D、G、C を作り、一転戻って、A から高音側に 1 つ、$(\frac{3}{2})$ して、E を作る手順と見る。すると、C から高い方へ合計、C、G、D、A、E の 5 音 (ヨナ抜き音階) が定まる (Table 16)。実際に、ピタゴラスの音階は、このような手順で作られたと言われる。

Table 16 Pythagoras tone for A

		A-tone
4	$(\frac{2}{3})^3 \cdot 2 = \frac{16}{27}$	C
3	$(\frac{2}{3})^2 \cdot 2 = \frac{8}{9}$	G
2	$(\frac{2}{3})$	D
1	1.0	A
5	$(\frac{3}{2})$	E

また、純正律から見ても、この Table 16 の音階は、A 系から始めるので、Table 10 のように、オクターブ内の DA 間の音程は、完全 5 度音程：$DA = \frac{3}{2}$ が保証される。C から始めた純正律と見れば、オクターブ内の DA 間音程は完全 5 度にならず：$DA = \frac{20}{27} \neq \frac{3}{2}$、Table 16 とは異なる数値になる。Table 16 は、ピタゴラス音律としては、見た目は、C から始めても、A から始めても同じになるが、オクターブ内の DA 音程が完全 5 度である要請から、C からではなく、A から始まる純正律が選ばれる。

この table 16 で、A から始めて、低音に 2 つ、高音に 1 つ音階を取れば (4 弦)、高音から、E,A,D,G となり、まさにこれが、ヴァイオリンの調弦音とチューニング手順そのものになる。また、A から始めて、すべて低音側に 3 つとれば (4 弦)、高音から、A,D,G,C となり。これはまさにビオラの調弦方法となる。A から始める純正律の自然短音階の 300 年の歴史が、完全 5 度調弦 (低い方から G,D,A,E) のヴァイオリン系の調弦として、その名残りが残っている。逆に言うと、300 年前に完成形となったヴァイオリンは、A から始まる純正律そのものに、楽器をチューニングしているわけである。したがって、まず、道理として、A 音のピッチを合わせるのである。

まとめ

17 世紀から 18 世紀に完成したヴァイオリン系楽器は、当時の、DA 間音程が完全 5 度となる、A から始まる純正律の自然短音階を正確に反映し、その名残りを現在も、各調弦音とそのチューニング手順に歴史を残している。したがって、A 音からピッチをチューニングする必然がある。ヴァイオリンを A 音からチューニングする根拠は、

ヴァイオリンのチューニング＝

A をピッチとする純正律の自然短音階

だからである。

謝辞

物理学実験 I「音速の測定」の発案者である、二階堂誠也教授 (神奈川大学) には、退任後、わざわざ大学まで来ていただいて、貴重なご意見をいただいた。ここに感謝いたします。

文献

1) 伊藤乾 (2010) 物理の響き こころのひびき♯♭ー音楽への認知的アプローチ 第 16 回 新しい「協和構造」を創出するーピタゴラスとメルセンヌの交錯. 科学 4 Vol.80, No.4. 岩波書店, 東京.
2) 伊藤乾 (2010) 物理の響き こころのひびき♯♭ 第 15 回 タルティーニと「響きの衝突」. 科学 3 Vol.80, No.3. 岩波書店, 東京.
3) Red Mitchell(1994) Cats of Any Color：Jazz, Black And White GeneLees「The Return of Red Mitchell」.Oxford Univ Pr(txt), pp143-166.England.
4) チャールズ・テイラー (1998) 佐竹淳, 林大訳 音の不思議をさぐる 大月書店, 東京都.
5) 小方厚 (2007) 音律と音階の科学 ブルーバックス B-1567 講談社, 東京.
6) 大橋力 (2011) 第 22 回 音楽のなかの有限と無限 (1) 科学 7 Vol.81, No.7. 岩波書店, 東京.

付録 1
ピアノのチューニングとギターのフレット

現在ピアノは 88 鍵盤、A0 から C8 まで、7 オクターブと短 3 度の音域を持つ。ピアノは、弦により音階をチューニングするが、一度、平均律でチューニングしてしまえば、キーの打鍵によるデジタル楽器となる。ピアノの平均律によるチューニングは、次のようになる。

Table A1 Tuning on Mean tone (piano)

F	F♯	G	G♯	A3	A♯	B	C4	C♯	D	D♯	E
				2							
									3		
		4									
							5				
6											
					7						
										8	
			9								
								10			
	11										
						12					
											13

(1) A4 のピッチを 440Hz として合わせる。

(2) A4 と差音が協和するように、1 オクターブ下の A3 を合わせる

(3) A3 から 4 度上の D4 を平均律で合わせる (平均律での合わせ方は後述する。また、4 度上の D4 は、A4 からは 5 度下であることに注意)。

(4) D4 から 5 度下の G3 を平均律で合わせる (平均律での 5 度下、あるいは 5 度上の合わせ方は後述する)。

(5) C4 を G3 の 4 度上に平均律で合わせる。

(6) F3 を C4 から 5 度下に平均律で合わせる。

(7) A ♯ 3 を F3 の 4 度上に平均律で合わせる。

(8) D ♯ 4 を A ♯ 4 から 4 度下に平均律で合わせる。

(9) G ♯ 3 を D ♯ 4 から 5 度下に平均律で合わせる。

(10) C ♯ 4 を G ♯ 3 の 4 度上に平均律で合わせる。

(11) F ♯ 3 を C ♯ 4 から 5 度下に平均律で合わせる。

(12) B3 を F ♯ 3 の 4 度上に平均律で合わせる。

(13) E4 を B3 の 4 度上に平均律で合わせる。

これらの手順により、平均律で、4 度上、5 度下を繰り返し使い、A3 を中心に、F3 から E4 までの、平均律の 1 オクターブの音階が決定する (Table A1)。全音階は、各音のオクターブ (周波数は 2 のベキ乗) の関係から、例えば F3 からは、88 鍵盤 (A0 〜 C8) の場合に、

F2, F1, F0, F4, F5, F6, F7

をチューニングする。

さて、音程比をセントという単位で表す場合がある。1 オクターブを 1200 セントとする。したがって、ある音程比をセント単位に換算する式は、

$$\text{セント} = 1200 \cdot \frac{log_{10}\text{音程比}}{log_{10}2}$$

となる。平均律の半音比が、1 オクターブを 12 音階均等：$\sqrt[12]{2}$ とするので、平均律の半音比は一定で、

$$log\ \sqrt[12]{2} \cdot 1200 = 99.99999778 \approx 100$$

であり、これを 100 セントと近似する。平均律の全音は、200 セントとなる。C に対して、音程は、C ♯ (100 セント)、D(200 セント)、D ♯ (300 セント)、E(400 セント)、F(500 セント) となる。平均律では、長 3 度 (L3) の音程は 400 セント、4 度は 500 セント、5 度は 700 セント、短 3 度 (S3) は 300 セントである。Table A2 のように、純正律では、長 3 度 (L3) の音程は 386 セント、4 度は 498 セント、5 度は 702 セント、短 3 度 (S3) は 316 セントとなる。

Table A2 Tone Interval (Cent)

	Pytha.	Harmo.	mean
L3	$\frac{81}{64}(408)$	$\frac{5}{4}(386)$	$(\sqrt[12]{2})^4(400)$
4	$\frac{4}{3}(498)$	$\frac{4}{3}(498)$	$(\sqrt[12]{2})^5(500)$
5	$\frac{3}{2}(702)$	$\frac{3}{2}(702)$	$(\sqrt[12]{2})^7(700)$
S3	$\frac{32}{27}(294)$	$\frac{6}{5}(316)$	$(\sqrt[12]{2})^3(300)$

したがって、平均律の音程は、純正律より、音程比で、

長 3 度 (L3)：14 セント広く、4 度：2 セント広く
5 度：2 セント狭く、短 3 度 (S3)：16 セント狭く

変えてチューニングする必要がある。実際の周波数差は、基音の周波数に生の音程比の差を乗じたものになり、2 音のうなりをもって音程比の差を確認する。

ピアノの平均律の調律手順 (3) について、A3 から、4 度上の D4 を平均律で合わせる方法を説明する。A3 音の倍音と、D4 音の倍音との共通倍音同志が、うなることを利用する (うならないのが純正律)。

Table A3 A→D(4UP) tuning on Mean tone [Hz]

A3		A4		E5	A5[880]
	D4[293.66]		D5		A5[880.98]

A3 の倍音は、第 2 倍音から第 4 倍音まで、A4、E5、A5 の倍音を持つ。D4 の倍音は、同じく第 2 倍音から、D5、A5、D6 を持つ。このとき、A3 と D4 の共有倍音である A5 の 2 音の周波数差による、うなりを利用する。D4 を正確に平均律でチューニングできたとすると、4 度上がるので、D4 の周波数は、$220 \cdot (\sqrt[12]{2})^5 = 293.66$Hz となる。このとき、この D4 の第 3 倍音の A5 は、1 オクターブと 5 度音

程差があるので、D 系列の第 3 倍音の A5 は、A5 = 880.98Hz となる。したがって、A 系列の純正比 (オクターブなので平均律でも同じ) の、A5 = 880Hz とは、$\Delta = 0.98$Hz の差となり、これは 2 セント平均律の方が高くなり、1 秒間に 0.98 回 (約 1 回) のうなりを生じる。この 1 秒間に 1 回のうなり (純正律と平均律の差) を手掛かりに、A3 から、平均律の D4 をチューニングする。

同様に、ピアノの平均律によるチューニング手順 (4) の、平均律の D4 から 5 度下の平均律の G3 を合わせる方法も、2 音のうなりを利用する。このとき、逆に、平均律の G3 から、5 度上の平均律の D4 を合わせると見直してみる。

Table A4 G→D(5UP) tuning on Mean tone [Hz]

G3[196.0]		G4	D5[588.0]
	D4[293.66]		D5[587.32]

G3 は、A3(220Hz) から全音下なので、G3 の周波数は、$220 \cdot (\sqrt[12]{2})^{-2} = 196.00$Hz となる。G 系の第 3 倍音の D5 は、1 オクターブと完全 5 度 ($\frac{3}{2}$) 上なので、D5 = 588.0Hz となる。G3 系の第 3 倍音：D5 と D4 系の第 2 倍音：D5 の共有倍音のうなりを利用する。基準の D4 系の第 2 倍音：D5 より、実際に合わせる G3 系の第 3 倍音：D5 の方が、周波数比は、2 セント高くなる。周波数の差は、$\Delta = 0.68$Hz となり、1 秒間に 0.68 回のうなり、すなわち 5 秒間に約 4 回のうなりを目安に、平均律 D4 を基準にして、5 度下の平均律 G3 をチューニングする。

音程比が同じ、4 度、5 度でも、基音の周波数の高低で 2 音の (周波数差による) うなりの回数も変わる。基音の音階が上がれば、うなりの回数は増える方向になる。ピアノの平均律によるチューニング手順 (3) と同様に、手順 (5) における、C4 を G3 を基準にして 4 度上で平均律でチューニングすると、C4 の第 3 倍音の G5 と、G3 の第 4 倍音の G5 が共有倍音となる。この 2 音の共有倍音のうなりが、$\Delta = 0.89$Hz(周波数比は 2 セント広く) となるので、C4 が基準の G3 と、1 秒間に約 1 回のうなりになるように平均律チューニングすればよい。

さらに、手順 (4) と同様に、手順 (6) の F3 を C4 を基準に 5 度下に平均律チューニングすると、F3 の第 3 倍音の C5 と、C4 の第 2 倍音の C5 が共有倍音となり、F3 の第 3 倍音の C5 の方が、周波数比で 2 セント広くなる。周波数の差は、$\Delta = 0.60$Hz となり、1 秒間に 0.60 回のうなり、すなわち 5 秒間に 3 回のうなりを目安に、平均律 C4 を基準にして、5 度下の平均律 F3 をチューニングする。

こうして、A3、D4、G3、C4、F3 を平均律でチューニングして、F3 と A3 間の長 3 度が、平均律で正しくチューニングできているかを確認する。平均律で、A3 = 220Hz、$F3 = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^{-4} = 174.61$Hz となる。

Table A5 F→A(3UP) tuning on Mean tone [Hz]

F3		F4		C5		F5	A5[873.05]
	A3		A4		E5		A5[880]

Table A5 のように、F3 の第 5 倍音：A5(2 オクターブと長 3 度上) = $F3 \cdot 4 \cdot \frac{5}{4} = 873.05$Hz と、A3 の第 4 倍音：A5(2 オクターブ上) = $A3 \cdot 4 = 880$Hz の共有倍音のうなりを利用する。A3 の第 5 倍音：A5 は、長 3 度上の F3 の第 5 倍音：A5 に比べ、周波数比で 14 セント高い。周波数の差は、$\Delta = 6.95$Hz となり、1 秒間に約 7 回のうなりを目安に、F3 と A3 間の平均律の長 3 度が正しくチューニングできているかを確認する。以上、ピアノの平均律によるチューニング手順 (3) から (6) までをまとめると、Table A6 となる。手順 (7) 以降は、同様に繰り返す。

Table A6 Tuning on Mean tone [Hz]

	harm.	Δ (Hz)	(1/s)
(3)A3→D4(4U)	A5	+0.98	1/1
(4)D4→G3(5D)	D5	+0.68	4/5
(5)G3→C4(4U)	G5	+0.89	1/1
(6)C4→F3(5D)	C5	+0.60	3/5
F3→A3(3U)	A5	+6.95	7/1

一方、ギターのフレット間隔は、平均律にしたがって打ち込んである。したがって、コード変換による転調は保証される。ギターは、高い方を 1 弦として、第 5 弦を A3 = 220Hz にチューニングする。各弦の調弦は、Table A7 となり、低い方の 3,4,5,6 弦は、コントラバスと同じ弦配置で、完全 4 度音程となっている。

Table A7 Tuning of a Guitar

St.	Guitar	St.	Contrabass
1H	E5		
2	B4		
3	G4	1H	G2
4	D4	2	D2
5	A3：220Hz	3	A1：55Hz
6L	E3	4L	E1

第 5 弦について考える。弦の振動について、波が

伝わる速さ v は、

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

であることが分かっている。T は張力、ρ は弦の物質の線密度である。波の波長 λ_m は、弦長を l として、

$$\lambda_m = \frac{2l}{m}, \quad m = 1, 2, 3..$$

m=1 は、基本振動となる。m=1 で $\lambda_1 = 2l$。周波数 (振動数)ν_m は、

$$\nu_m = \frac{v}{\lambda_m} = \frac{m}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{m}{2l}v$$

第 5 弦では、この式から、

$$220Hz = \frac{1}{2l}v$$

となる。Martin D18 の弦長 l が 0.645m として、v_A=283.8(m/s) となる。同じ弦であれば、v_A は変わらない。ギターのフレットは、第 5 弦に対しては、ネック先の第 0 フレットが開放弦の A3 で、エンドピンに向かって、第 1 フレットから、

A ♯,B,C,C ♯,D,D ♯,E,F,F ♯,G,G ♯,A

という平均律の音列を作る。1 つのフレットが半音：$\sqrt[12]{2}$ になっていて、第 12 フレットでちょうど、弦長が $\frac{l}{2}$ の 1 オクターブ上がる A4 音になるようにフレットが切ってある。純正律と平均律で、オクターブ音の周波数のずれは、ない。第 12 フレットの位置は、正確に $\frac{l}{2}$=0.3225m となっている。A3 に対して、長 3 度の C4 ♯は、第 4 フレット、5 度の E4 は、第 7 フレットとなる。

フレットを押さえることで、弦長がフレット位置で確定し短くなり、音階を変える。5 度上：E4 の第 7 フレットの位置 (平均律) は、

$$\lambda_{E4M} = \frac{v_A}{f} = \frac{283.8}{220 \cdot (\sqrt[12]{2})^7} = 0.8610m$$

なので、エンドピンからの長さは、$\frac{\lambda_{E4M}}{2}$=0.4305m と調整される。実際の D18 とピッタリ合う。フレット金具の幅は、1mm である。この E4 の位置は、純正律では、

$$\lambda_{E4H} = \frac{v_A}{f} = \frac{283.8}{220 \cdot \frac{3}{2}} = 0.86m$$

となるので、エンドピンからの長さは、$\frac{\lambda_{E4H}}{2}$=0.43m となる。これは、単純に弦長の 2/3 に相当する。平均律が、5 度音程差では、純正律より音程比で 2 セント狭くなることにより、波長は長くなり、純正律の位置よりも、平均律の位置は、第 0 フレットの方へ、

Δ (M − H) = 0.4305 − 0.4300= 0.0005m

0.5mm 長くずらしてフレットが切ってある。

同様に、長 3 度上の第 4 フレット (C ♯)：

$$\lambda_{C\sharp 4M} = \frac{v_A}{f} = \frac{283.8}{220 \cdot (\sqrt[12]{2})^4} = 1.0239m$$

なので、エンドピンからの長さは、$\frac{\lambda_{C\sharp 4M}}{2}$=0.51205m と調整される。実際の D18 とピッタリ合う。この C♯4 の位置は、純正律では、

$$\lambda_{C\sharp 4H} = \frac{v_A}{f} = \frac{283.8}{220 \cdot \frac{5}{4}} = 1.032m$$

となるので、エンドピンからの長さは、半分の、$\frac{\lambda_{C\sharp 4H}}{2}$=0.516m となる。これは、単純に弦長の 4/5 に相当する。平均律が、長 3 度音程差では、純正律より音程比で 14 セント広くなることにより、波長は短くなり、純正律の位置よりも、平均律の位置は、エンドピンの方へ、

Δ (M − H) = 0.5120 − 0.5160= −0.0040m：

4mm 短くずらしてフレットが切ってある。これらの、平均律 (M) と純正律 (H) の弦長の差を、音程比で整理すると、Table A8 となる。

Table A8 String length(m) $\lambda/2$ for tone

	Harm.	Mean
Octave	0.3225	0.3225(12Fret)
C♯/A(3)	0.5160(+0.0040)	0.5120(4Fret)
D/A(4)	0.4838(+0.0006)	0.4832(5Fret)
E/A(5)	0.4300(-0.0005)	0.4305(7Fret)

弦を弾くと、基本振動 ν_1 に、倍音 (m=2,3,4...) が混ざって音色となる。弦の振動が、中央ホールからヴァイオリン系あるいは木製ギターの表板に伝わる。表板には、ネックに平行な柾目の板を使う。ネックに平行に並んでいる木目の間隔も、同じものが良いとされる。表板を伝わる振動の速度は、木目に平行 (ネックに平行) な方向の速さは、木目に垂直 (ネックに垂直) な方向のほぼ 2 倍であることが分かっている。したがって、中央の振動が、表板周辺まで全体に同時に伝わるためには、表板の長さの比が、ネック方向が 2、ネックに垂直な方向が 1 の 2：1 の比が良い。300 年前に完成形となった、ヴァイオリン系楽器を製造する過程で、経験的に探り出した、表板の形状に対する結論であったと考えられている [4)]。