線形代数 I 期末試験 (2019 年度)

問 1. 計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x & 4 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ が正則でない x

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 20 & 30 & 40 & 10 \\ 30 & 40 & 10 & 20 \\ 40 & 10 & 20 & 30 \end{vmatrix}$

(5) $\underbrace{\begin{vmatrix} \Large O & & & -1 \\ & & -1 & \\ & \iddots & & \\ -1 & & \Large O & \end{vmatrix}}_{2n+1}$

問 2. 5 文字の置換 σ, τ を $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $\sigma\tau$ を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$ の形で表せ.

(2) $\mathrm{sgn}\ (\sigma\tau)^{2019}$ を求めよ.

問 3. ${}^tA = -A$ を満たす正方行列 A を交代行列と呼ぶ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ a & b \end{pmatrix}$ が交代行列となるような a, b を求めよ.

(2) n を奇数とする. A が n 次交代行列であるとき, A は正則ではないことを示せ.

問 4. 以下の 2 つの性質をともに満たす 3 次正方行列 A を全て求めよ.

(a) A の行列式は正の整数.

(b) A の余因子行列は -10 以上 10 以下の適当な整数 a を用いて $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ となる.