

線形代数 II 期末試験 (2019 年度)

問 1. 以下の問いに答えよ. ※ 答えのみ述べよ.

(1) 線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ とする. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $f(\mathbf{x})$ を求めよ.

(2) 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -y \end{pmatrix}$ が線形写像か否か述べよ.

(3) a, b, c を定数とする. $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c \right\}$ が \mathbb{R}^2 の部分空間となるとき, a, b, c が満たす条件を述べよ.

(4) $f: V \rightarrow U$ を線形写像とし, $\dim V = 6$, $\dim U = 5$, $\dim \text{Im}(f) = 3$ とする. このとき $\dim \ker(f)$ を述べよ.

(5) $\mathbb{R}[x]_2$ を 2 次以下の実数係数多項式全体からなるベクトル空間とし, 線型変換 $D: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ を $D(f(x)) = \frac{d}{dx}f(x)$ で定める. このとき, $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1, 1+x, x+x^2\}$ に関する D の表現行列を述べよ.

問 2. V をベクトル空間とする. V のベクトルからなる順序付き集合 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が V の基底であるということの定義を述べよ.

問 3. 線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & c & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $c = 0$ とする. $\ker(f)$ の基底を一組求めよ.

(2) $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ となるような c の条件を求めよ.

(3) \mathbb{R}^3 の標準基底に関する f の表現行列を述べよ. ※ 答えだけで良い.

(4) \mathbb{R}^3 の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する f の表現行列を求めよ.