

線形代数学 III 演習 中間試験 (6/3)

学籍番号 _____ 氏名 _____

問 1. \mathbb{C}^2 の標準内積を考える. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1+i \\ z \end{pmatrix}$ とする.

(1) $\|\mathbf{a}\|$ を求めよ.

(2) \mathbf{a} と \mathbf{b} が直交するときの複素数 z を求めよ.

問 2. \mathbb{R}^3 の基底 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ をシュミットの方法で正規直交化せよ.

問 3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ を直交行列を用いて対角化せよ.

問 4. 実数係数多項式全体からなる \mathbb{R} 上のベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ に対して, 内積 (\cdot, \cdot) を

$$(f(x), g(x)) := \int_0^{\infty} e^{-t} f(t)g(t) dt \quad (f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x])$$

で定義する. この内積空間 $\mathbb{R}[x]$ について以下の問いに答えよ.

(1) 実数 α が $\|\alpha\| = 1$ を満たすとき, α を求めよ.

(2) $n \geq 1$ を自然数とする. 実数 a, b に対し, $f(x) = ax^n + b$ は 1 と直交し, かつ $\|f(x)\| = 1$ を満たしているとする. このとき実数 a を求めよ.

解答欄

問 1. (1) _____ (2) _____

問 2. _____

問 3. (2) 直交行列 $P =$ _____ に対して $P^{-1}AP =$ _____

問 4. (1) $\alpha =$ _____ (2) $a =$ _____