

5 一様連続・一様収束

5.1 一様連続

- $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.
- f が $x_0 \in X$ で連続であるとは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

が成り立つことであった. 点 x_0 で連続というのは1点を指定してそこで連続であるかを考えているので, 上の δ は ε だけではなく, あらかじめ指定した点 x_0 にも依存している.

- それに対し, f が一様連続であるとは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

が成り立つことである. 上で定まる δ は ε (と f) にのみ依存する. とにかく2点 x, x' が近くにありさえすれば $f(x), f(x')$ は近いといっているわけである.

注 $f(x) = \frac{1}{x}$ を考える.

- $I = (0, 1]$ とすると f は I で一様連続でない.
- $I = [1, \infty)$ とすると $f(x)$ は I で一様連続である.

詳しくは0節の27ページを参照のこと.

定理 5.1

(X, d) を点列コンパクトな距離空間, (Y, d_Y) を距離空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき f は一様連続である.

証明

- 一様連続でないとする. このとき, ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, どんな $\delta > 0$ をとっても, $d_X(x, x') < \delta$ であるにもかかわらず, $d_Y(f(x), f(x')) \geq \varepsilon_0$ であるような $x, x' \in X$ があることになる.
- $\delta = 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$) とすると, 各 n に対し

$$d_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} \text{ かつ } d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon_0$$

となる $x_n, x'_n \in X$ が存在することになる.

- $\{x_n\}$ は X の点列で (X, d_X) は点列コンパクトだから, ある $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ とある $x_\infty \in X$ が存在して $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_\infty$ が成り立つ.

- $\{x'_n\}$ の部分列 $\{x'_{n_k}\}$ も x_∞ に収束する．実際,

$$0 \leq d_X(x'_{n_k}, x_\infty) \leq d_X(x'_{n_k}, x_{n_k}) + d_X(x_{n_k}, x_\infty) \leq \frac{1}{n_k} + d_X(x_{n_k}, x_\infty) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

であるから $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = x_\infty$ も成り立つ．

- f は連続より

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(x_\infty)$$

が成り立つ．よって

$$d_Y(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \leq d_Y(f(x_{n_k}), f(x_\infty)) + d_Y(f(x_\infty), f(x'_{n_k})) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

一方, $d_Y(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \geq \varepsilon_0$ であり矛盾．よって f は一様連続である．□

5.2 一様収束

- $S \neq \emptyset$ を集合とする． $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ なる関数の列 $\{f_n\}$ を考える．各 $t \in S$ に対して実数列 $\{f_n(t)\}$ が収束するとき, 極限值は t の関数である．それを $f(t)$ とかくとき, 関数列 $\{f_n\}$ は f に**各点収束**するという．このとき

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) &= f(t) \quad (S \text{ 上各点 (収束)}) \\ f_n(t) &\rightarrow f(t) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (S \text{ 上各点 (収束)}) \\ f_n &\rightarrow f \quad (n \rightarrow \infty) \quad (S \text{ 上各点 (収束)}) \end{aligned}$$

などと表す．

例

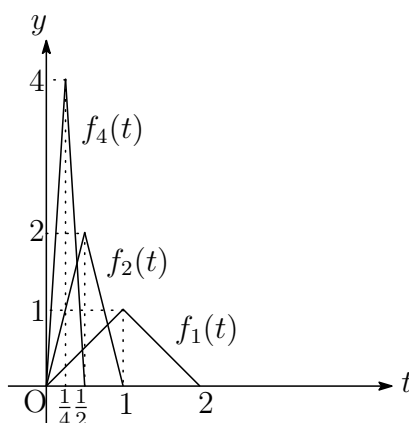
- (1) $S = [0, 1]$, $f_n(t) = t^n$ ($t \in [0, 1]$) とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} 1 & t = 1, \\ 0 & t \in [0, 1) \end{cases} \quad [0, 1] \text{ 上各点収束}$$

- (2) $S = [0, 2]$ とし $f_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) を次のように定義する：

$$f_n(t) = \begin{cases} n^2 t & \left(0 \leq t < \frac{1}{n}\right) \\ 2n - n^2 t & \left(\frac{1}{n} \leq t < \frac{2}{n}\right) \\ 0 & \left(t \geq \frac{2}{n}\right) \end{cases}$$

とすると, $\{f_n(t)\}$ は S 上 $f(t) = 0$ に各点収束する



注

- (1) の例では各 n に対し, f_n は連続であるが, f は連続でない.
- (2) の例では, 各 n に対し, f_n は連続で, f も連続であるが

$$\int_0^2 f_n(t) dt = \frac{2}{n} \times n \times \frac{1}{2} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 1 \neq 0 = \int_0^2 f(t) dt$$

定義

$S (\neq \emptyset)$ で定義された関数の列 (S 上の関数列) $\{f_n\}$ が S 上の関数 f に S 上一様収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0, \quad t \in S \quad \Rightarrow \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

が成り立つことである.

- 一様収束は次のようにいってもよい:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in S} |f_n(t) - f(t)| = 0$$

定理 5.2

距離空間 (X, d) 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が f に X 上一様収束するならば f も X で連続である.

証明 目標「任意の $t_0 \in X$ に対して, f が t_0 で連続, つまり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して

$$d(t, t_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

が成り立つこと」

- $t_0 \in X$ を任意にとり固定する.
- 次に $\varepsilon > 0$ を任意にとる. $\{f_n\}$ は f に一様収束するから, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\forall t \in X : |f_{n_0}(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (5.1)$$

が成り立つ. 特に $t = t_0$ でも成り立つ.

- また, f_{n_0} は t_0 で連続であるから (上の ε に対して) ある $\delta > 0$ が存在して

$$d(t, t_0) < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (5.2)$$

が成り立つ.

- よって (5.1), (5.2) より $d(t, t_0) < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &\leq |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| + |f_{n_0}(t_0) - f(t_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって f は t_0 で連続である. t_0 は任意であるので f は連続関数である. $\square$

定理 5.3

距離空間 (X, d) 上で定義された実数値有界連続関数の全体を $BC(X)$ とする:

$$BC(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は有界で連続}\}$$

このとき, $f, g \in BC(X)$ に対し

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in X} |f(t) - g(t)| = \sup\{|f(t) - g(t)| \mid t \in X\}$$

とする. このとき $(BC(X), d_\infty)$ は完備距離空間である.

注

- X 上で定義された連続関数全体を $C(X)$ とかく.
- (X, d) が点列コンパクトであれば X で定義された連続関数は有界となるので (定理 4.8) より $BC(X) = C(X)$ である. $X = [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$ としたものが 1 節 34 ページで学んだ $(C([0, 1]), d)$ ($d(f, g) = \max_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$) である ($[0, 1]$ は $\mathbb{R}$ の点列コンパクト集合であることに注意).

証明

- d_∞ が距離の条件 (d1), (d2), (d3) を満たすことは $C([0, 1])$ の場合と全く同様である (f, g が有界ならば $|f(t) - g(t)|$ も有界であるので $d_\infty(f, g)$ が well-defined であることに注意).
- $(BC(X), d_\infty)$ が完備であることを示そう. $\{f_n\}$ を $(BC(X), d_\infty)$ の Cauchy 列とする. 目標は $f \in BC(X)$ で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(f_n, f) = 0$$

となるものが存在することを示すことである.

- 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. $\{f_n\}$ は Cauchy 列であるから, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d_\infty(f_m, f_n) < \varepsilon$$

が成り立つ.

- これより, 任意の $t \in X$ に対して $m, n \geq n_0$ ならば

$$|f_m(t) - f_n(t)| \leq \sup_{s \in X} |f_m(s) - f_n(s)| = d_\infty(f_m, f_n) < \varepsilon \quad (5.3)$$

が成り立つ.

- よって, 各 $t \in X$ に対して, 実数列 $\{f_n(t)\}$ は Cauchy 列である. 実数の完備性より, 各 $t \in X$ に対して, 実数列 $\{f_n(t)\}$ は収束する. 極限值は t の関数であるから $f(t)$ とかく. この f が

$$\text{有界であること. 連続であること. } d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$$

を満たすことを示せばよい.

- f は有界であることを示そう. (5.3) で $m \rightarrow \infty$ とすることにより $n \geq n_0$ ならば

$$\forall t \in X : |f(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon \quad (5.4)$$

が成り立つ.

- (5.4) で特に $n = n_0$ として (n_0 は ε から決まっていることに注意)

$$\forall t \in X : |f(t) - f_{n_0}(t)| \leq \varepsilon \quad (5.5)$$

が成り立つ.

- よって (5.5) より $\forall t \in X$ に対して

$$|f(t)| \leq |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t)| \leq \varepsilon + \sup_{t \in X} |f_{n_0}(t)| < \infty$$

したがって f は有界である.

- 次に f は連続であることを示す. (5.4) より

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{t \in X} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad (5.6)$$

であるから $\{f_n\}$ は f に X 上一様収束する. したがって定理 5.2 より f も連続である.

- 最初に任意に選んだ ε に対して n_0 が決まり, (5.6) より

$$n \geq n_0 \Rightarrow d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$$

が成り立つので $f_n \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) in $BC(X)$ が成り立つ. $\square$

最後に $C([0, 1])$ は距離を

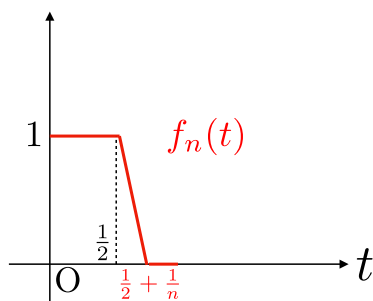
$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

とすると距離空間 $(C([0, 1]), d_1)$ は完備でないことを見よう.

- $[0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n(t)\}$ を次のように定義する:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ -nt + \frac{n+2}{2}, & t \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right], \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \infty\right) \end{cases}$$

とすると $f_n \in C([0, 1])$ である.



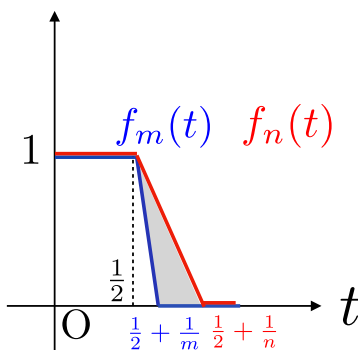
- このとき $m \geq n \geq 2$ ならば

$$d_1(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)| dt = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \times 1 \times \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

- よって任意の $\varepsilon > 0$ に対して $(1/n_0) < \varepsilon$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ をとれば

$$m \geq n \geq n_0 \Rightarrow d_1(f_m, f_n) < \varepsilon$$

が成り立つ ($n > m$ のときも同様である)。



- したがって $\{f_n\}$ は $(C([0, 1]), d_1)$ における Cauchy 列である。
- もし $(C([0, 1]), d_1)$ が完備であるならば、ある $f \in C([0, 1])$ が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(f_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt = 0$$

となるはずである。

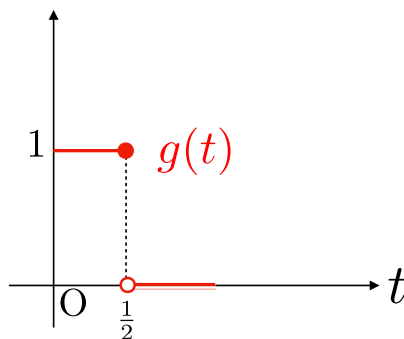
- しかし、

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0, & t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

とすると

$$\int_0^1 |f_n(t) - g(t)| dt = \frac{1}{2n} \quad (n \geq 2)$$

である (g は連続ではないが積分可能であることに注意)。



- したがって

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t) - f_n(t)| dt + \int_0^1 |f_n(t) - g(t)| dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから $\int_0^1 |f(t) - g(t)| dt = 0$ である (g は $[0, 1]$ で連続ではないので, これから直ちに $f \equiv g$ と結論づけられない).

- まず

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t) - g(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt = 0$$

だから

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t) - g(t)| dt = 0$$

である. f, g はともに $[0, \frac{1}{2}]$ で連続であるから $[0, \frac{1}{2}]$ 上で $f(t) \equiv g(t)$ が成り立つ. 特に $f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) = 1$ である.

- 一方, 任意の $N \in \mathbb{N}, N \geq 3$ に対して

$$\int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{N}}^1 |f(t) - g(t)| dt = 0$$

であり, f は $[0, 1]$ で連続, g は $[\frac{1}{2} + \frac{1}{N}, 1]$ ($N = 3, 4, \dots$) で連続であるから,

$$f(t) \equiv g(t) = 0 \quad t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{N}, 1\right] \quad (N = 3, 4, \dots)$$

特に $f(\frac{1}{2} + \frac{1}{N}) = g(\frac{1}{2} + \frac{1}{N}) = 0$ が $N \geq 3$ で成り立つ. f は $[0, 1]$ で連続であるから特に $\frac{1}{2}$ で連続である. したがって

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N}\right) = 0$$

であるが, これは矛盾である. したがって距離空間 $(C([0, 1]), d_1)$ は完備ではない.

5.3 補足: Dini の定理

定理 5.4 (Dini の定理)

(X, d) を距離空間, $K \subset X$ ($K \neq \emptyset$) を点列コンパクトとする. K 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が次の条件を満たすとき f に K 上一様収束する.

- (i) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ ($n = 1, 2, \dots, x \in K$)
- (ii) $\{f_n\}$ は f に各点収束する.
- (iii) f は K 上連続である.

証明

- K に同じ距離を定義することにより (K, d) は距離空間である. (K, d) における開球を $B_r^K(x_0)$ と表す, つまり

$$B_r^K(x_0) = \{x \in K : d(x, x_0) < r\}$$

- $\varepsilon > 0$ を任意にとる.
- $x_0 \in K$ を任意にとると, 条件 (ii) より, ある $n(x_0) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n(x_0) \Rightarrow |f_{n(x_0)}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ.

- 次に f と f_n は x_0 で連続である (条件 (iii)) から, ある $\delta(x_0) > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta(x_0), x \in E, \text{ つまり } x \in B_{\delta(x_0)}^K(x_0) \\ \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ かつ } |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ.

- したがって $x \in B_{\delta(x_0)}^K(x_0)$ ならば

$$\begin{aligned} & |f_{n(x_0)}(x) - f(x)| \\ & \leq |f_{n(x_0)}(x) - f_{n(x_0)}(x_0)| + |f_{n(x_0)}(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ.

- さらに $\{f_n\}$ の n に関する単調性 (条件 (i)) から

$$n \geq n(x_0), x \in B_{\delta(x_0)}^K(x_0) \Rightarrow 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{n(x_0)}(x) < \varepsilon \quad (5.7)$$

が成り立つ.

- 次に

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\delta(x)}^K(x)$$

が成り立つ.

- $B_{\delta(x)}^K(x)$ は (K, d) は開集合で $\{B_{\delta(x)}^K(x)\}_{x \in K}$ は K の開被覆である. K は点列コンパクトであるから定理 4.6 よりある有限個の $x_1, x_2, \dots, x_k \in K$ が存在して

$$K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta(x_i)}^K(x_i)$$

が成り立つ.

- $N = \max\{n(x_1), \dots, n(x_k)\}$ とおくと, $n \geq N, x \in K$ ならば $x \in B_{\delta(x_i)}^K(x_i)$ となる $i = 1, \dots, k$ があるので (5.7) から

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon$$

が成り立つ. これは一様収束を意味する. $\square$

6 Ascoli-Arzelá の定理

6.1 関数の様々な連続性

- 本節は主に $\mathbb{R}$ の区間あるいは $\mathbb{R}^N$ の部分集合で定義された実数値関数を扱う。

復習 (一様連続)

- $A \subset \mathbb{R}^N$ ($A \neq \emptyset$) で定義された関数 f が A 上**一様連続**であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A, d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$$

が成り立つことである。

- $K \subset \mathbb{R}^N$ ($K \neq \emptyset$) が有界閉集合 (したがって (点列) コンパクト集合) で、 f が K 上連続であるならば f は K 上**一様連続**である。

定義 (Lipschitz 連続, Hölder 連続)

- $A \subset \mathbb{R}^N$ ($A \neq \emptyset$) で定義された関数 f がある定数 $L > 0$ に対して

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq L d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A)$$

をみたすとき、 f は A 上 **Lipschitz 連続**であるという。

- 同じくある $L > 0, \alpha \in (0, 1)$ が存在して

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq L d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^\alpha \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A)$$

をみたすとき、 f は A 上 (α 次)**Hölder 連続**であるという。

- $A \subset \mathbb{R}^N$ ($A \neq \emptyset$) で定義された関数 f が A 上 Lipschitz 連続あるいは α 次 Hölder 連続であれば A 上**一様連続**である。

例 $f(x) = e^{-|x|}$ は $\mathbb{R}$ 上で Lipschitz 連続である。実際、 $t, s \geq 0$ に対して

$$e^{-t} - e^{-s} = \int_s^t (e^{-x})' dx = \int_s^t (-e^{-x}) dx$$

$$\begin{aligned} |e^{-t} - e^{-s}| &= \left| \int_s^t (-e^{-x}) dx \right| \leq \left| \int_s^t |-e^{-x}| dx \right| \\ &\leq \left| \int_s^t dx \right| = |t - s| \quad (s, t \geq 0 \text{ より } |-e^{-x}| \leq 1) \end{aligned}$$

したがって

$$|e^{-|x|} - e^{-|y|}| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

よって $L = 1$ として $\mathbb{R}$ 上 Lipschitz 連続である.

6.2 Ascoli-Arzelá の定理

- Ascoli-Arzelá の定理は連続関数の列 (族) が一様収束する部分列をもつための条件を与える定理である. この節では $\mathbb{R}^N$ の点も $\mathbf{x}$ ではなく x を用い, $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を $|x - y|$ と略記することにする.

定義 (一様有界)

$A \subset \mathbb{R}^N$ ($A \neq \emptyset$) で定義された関数列 $\{f_n\}$ が A 上一様有界であるとは, ある $M > 0$ が存在して

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A : |f_n(x)| \leq M$$

が成り立つことである. いいかえると

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x)| \right) < \infty$$

が成り立つことである.

例

- $f_n(x) = \sin nx$ ($n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$) とすると

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A : |f_n(x)| = |\sin nx| \leq 1$$

であるので $\{f_n\}$ は $\mathbb{R}$ 上一様有界である.

- $f_n(x) = n \sin nx$ ($n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$) とすると

$$|f_n(x)| \leq n$$

であるので, 各 n に対し, f_n は $\mathbb{R}$ 上有界な関数であるが

$$n = \left| n \sin \frac{\pi}{2} \right| = \left| f_n \left(\frac{\pi}{2n} \right) \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$$

であるから $\{f_n\}$ は $\mathbb{R}$ 上一様有界ではない.

定義（同程度（一様）連続）

$A \subset \mathbb{R}^N$ ($A \neq \emptyset$) で定義された関数列 $\{f_n\}$ が A 上同程度（一様）連続であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$\forall n \in \mathbb{N}; x, y \in A, |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

が成り立つことである。

- δ が n に依存しないことがこの定義のポイントである。

例 $f_n(x) = \sin nx$ ($n \in \mathbb{N}$) を $[0, \pi]$ で考える。 $\{f_n\}$ は $[0, \pi]$ で同程度（一様）連続でない。

- どんな $\delta > 0$ をとっても $|x - y| < \delta$ ($x, y \in [0, \pi]$) であるにもかかわらず $|f_n(x) - f_n(y)| = 2$ となる n, x, y が存在することを示す。
- $\delta > 0$ を任意にとり、 $\frac{3\pi}{2n_0} < \min\{\delta, \pi\}$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ をとると

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n} \in [0, \pi]$$

かつ

$$\left| \frac{\pi}{2n} - \frac{3\pi}{2n} \right| \leq \frac{3\pi}{2n} < \delta$$

であるが

$$\left| f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - f_n\left(\frac{3\pi}{2n}\right) \right| = 2$$

である。

定理 6.1（Ascoli-Arzelá の定理）

有界閉区間 $I = [a, b]$ で定義された連続関数列 $\{f_n\}$ が一様有界かつ同程度（一様）連続であれば、ある $\{f_n\}$ の部分列 $\{f_{n_k}\}$ と $f \in C([a, b])$ が存在して $\{f_{n_k}\}$ は f に I 上一様収束する。

証明

Step 1: $[a, b] \cap \mathbb{Q} = \{r_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ とおき、 $\{f_n\}$ のある部分列は各 r_j で収束することを示す。

- $\{f_n\}$ は一様有界であるから、ある $M > 0$ が存在して

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b] : |f_n(x)| \leq M \quad (6.1)$$

が成り立つ。

- (6.1) より $|f_n(r_1)| \leq M$ であるので数列 $\{f_n(r_1)\}$ は有界である．したがって Bolzano-Weierstrass の定理（定理 0.12）より，ある自然数の単調増加列 $\{n_1(k)\}$ が存在して $\{f_{n_1(k)}(r_1)\}_k$ は収束する．
- (6.1) より $|f_{n_1(k)}(r_2)| \leq M$ であるので同じく Bolzano-Weierstrass の定理より $\{n_1(k)\} \supset \{n_2(k)\}$ が存在して $\{f_{n_2(k)}(r_2)\}$ は収束する，つまり：

$$\{f_{n_2(k)}(x)\} \text{ は } x = r_1, r_2 \text{ で収束}$$

- 以下 $\{f_{n_l(k)}(x)\}$ が $r_1, \dots, r_l$ で収束するならば， $\{n_{l+1}(k)\} \subset \{n_l(k)\}$ が存在して $\{f_{n_{l+1}(k)}(r_{l+1})\}$ は収束する．
- ここまでをまとめよう：

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{f_1, & f_2, & f_3, & \cdots & f_k, & \cdots\} & \text{元の列,} \\
 & & \cup & & & & \\
 \{\mathbf{f}_{n_1(1)}, & f_{n_1(2)}, & f_{n_1(3)}, & \cdots & f_{n_1(k)}, & \cdots\} & r_1 \text{ で収束,} \\
 & & \cup & & & & \\
 \{f_{n_2(1)}, & \mathbf{f}_{n_2(2)}, & f_{n_2(3)}, & \cdots & f_{n_2(k)}, & \cdots\} & r_1, r_2 \text{ で収束,} \\
 & & \cup & & & & \\
 \{f_{n_3(1)}, & f_{n_3(2)}, & \mathbf{f}_{n_3(3)}, & \cdots & f_{n_3(k)}, & \cdots\} & r_1, r_2, r_3 \text{ で収束,} \\
 & & \cup & & & & \\
 & & \vdots & & & & \\
 & & \cup & & & & \\
 \{f_{n_k(1)}, & f_{n_k(2)}, & f_{n_k(3)}, & \cdots & \mathbf{f}_{n_k(k)}, & \cdots\} & r_1, \dots, r_k \text{ で収束,} \\
 & & \cup & & & & \\
 & & \vdots & & & &
 \end{array}$$

- そこで $\{f_{n_k(k)}\}$ という関数列を考える（対角線論法）と $k \geq l$ ならば $\{f_{n_k(k)}\}_{k \geq l}$ は $\{f_{n_l(k)}\}_k$ の部分列であるので

$$\{f_{n_k(k)}(r_1)\}, \dots, \{f_{n_k(k)}(r_l)\}$$

は収束する．つまり，任意の $l \in \mathbb{N}$ に対して $\{f_{n_k(k)}(r_l)\}_{k \geq l}$ は収束するので Cauchy 列である．

Step 2: $\{f_{n_k(k)}\}$ は $[a, b]$ 上である関数 f に一様収束することを示す．

- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．
- $\{f_n\}$ は同程度（一様）連続であるから，ある $\delta > 0$ が存在して

$$\forall n \in \mathbb{N}; x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad (6.2)$$

が成り立つ．

- 次に

$$[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (r_j - \delta, r_j + \delta) \quad \text{開被覆!}$$

が成り立つ. 実際, $x \in [a, b]$ とすると有理数の稠密性 (命題 0.6) より $|x - r_j| < \delta$ となる $r_j \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$ が存在する. よって $x \in (r_j - \delta, r_j + \delta)$ である.

- $[a, b]$ は $\mathbb{R}$ の有界閉集合 (コンパクト集合) であるので, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^N (r_j - \delta, r_j + \delta)$$

が成り立つ (実際 $(r_j - \delta, r_j + \delta)$ 「たち」の有限個で覆えるのだからその j で一番大きいものを N とすればよい).

- Step 1 より, 各 $l = 1, \dots, N$ に対して $\{f_{n_k(k)}(r_l)\}_{k \geq N}$ は Cauchy 列であるから

$$\forall l = 1, \dots, N, \quad \exists n_0 = n_0(l); \quad m, p \geq n_0 \Rightarrow |f_{n_m(m)}(r_l) - f_{n_p(p)}(r_l)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ.

- $N_0 = \max\{n_0(1), \dots, n_0(N)\}$ とすれば

$$m, p \geq N_0, \quad l = 1, \dots, N \Rightarrow |f_{n_m(m)}(r_l) - f_{n_p(p)}(r_l)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (6.3)$$

が成り立つ.

- したがって $m, p \geq N_0$ ならば, 任意の $x \in [a, b]$ に対して $x \in (r_l - \delta, r_l + \delta)$ となる $l = 1, \dots, N$ が存在するので (6.2), (6.3) より

$$\begin{aligned} |f_{n_m(m)}(x) - f_{n_p(p)}(x)| &\leq |f_{n_m(m)}(x) - f_{n_m(m)}(r_l)| + |f_{n_m(m)}(r_l) - f_{n_p(p)}(r_l)| \\ &\quad + |f_{n_p(p)}(r_l) - f_{n_p(p)}(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ.

- もういちど整理すると, ここまで示したことは, 任意に $\varepsilon > 0$ に対し, $N_0 \in \mathbb{N}$ が定まり

$$m, p \geq N_0 \Rightarrow \forall x \in [a, b]; \quad |f_{n_m(m)}(x) - f_{n_p(p)}(x)| < \varepsilon$$

つまり

$$m, p \geq N_0 \Rightarrow d_{\infty}(f_{n_m(m)}, f_{n_p(p)}) = \max_{x \in I} |f_{n_m(m)}(x) - f_{n_p(p)}(x)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

- 以上より $\{f_{n_m(m)}\}$ は $C([a, b], d_\infty)$ で Cauchy 列であることがわかった.
- $C([a, b], d_\infty)$ は完備より, ある $f \in C([a, b])$ が存在して

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_\infty(f_{n_m(m)}, f) = 0$$

が成り立つ. 以上で定理が示された (The proof has been completed!). $\square$

- Ascoli-Arzelá の定理は $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合 (コンパクト集合) で定義された関数列に対しても正しい.

定理 6.2 (Ascoli-Arzelá の定理)

$K \subset \mathbb{R}^N$ ($K \neq \emptyset$) を有界閉集合とし, $\{f_n\}$ は K 上の (連続) 関数列で一様有界かつ同程度 (一様) 連続であるとする. このとき $\{f_n\}$ の部分列 $\{f_{n_k}\}$ と $f \in C(K)$ が存在して $\{f_{n_k}\}$ は f に K 上一様収束する.

- 定理 6.1 の証明の Key は $[a, b]$ のコンパクト性と $[a, b] \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$ という, $[a, b]$ で稠密な可算集合をとってくることである. K の稠密な可算部分集合を用いれば証明は全く同様である.