

## 4 距離空間におけるコンパクト性

- コンパクト性は解析学においても重要な概念である.

### 4.1 点列コンパクト

- Bolzano-Weierstrass の定理 (定理 0.12) を思い出そう :

「有界な実数列は収束する部分列をもつ」

- $I = [a, b]$ ,  $\{x_n\}$  を  $I$  の数列とする.  $a \leq x_n \leq b$  であるので  $\{x_n\}$  は有界である. したがって Bolzano-Weierstrass の定理より  $\{x_n\}_n$  の部分列  $\{x_{n_k}\}_k$  である  $x \in \mathbb{R}$  に収束するものが存在する.  $a \leq x_{n_k} \leq b$  より  $a \leq x \leq b$  であるから  $x \in I$  である.
- したがって  $I$  の任意の数列  $\{x_n\}_n$  に対し, ある部分列  $\{x_{n_k}\}_k$  が存在して  $\{x_{n_k}\}_k$  はある  $x \in I$  に収束する.
- $(X, d)$  を距離空間,  $\{x_n\}_n$  を  $X$  の点列とする. このとき自然数の単調増加列

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$$

を用いて  $\{x_{n_k}\}_k$  と表される点列を  $\{x_n\}_n$  の**部分列**という.  $n_k$  は  $n(k)$  とかいてもよい.

#### 命題 4.1

$(\mathbb{R}^N, d_2)$  を考える.  $K \subset \mathbb{R}^N$  を有界閉集合とする.  $K$  の任意の点列  $\{x_n\}_n$  に対しある部分列  $\{x_{n_k}\}_k$  が存在して  $\{x_{n_k}\}_k$  はある  $x \in K$  に収束する.

**証明** 記号が煩雑となるので  $N = 2$  として示す.

- $K$  は有界であるので, ある  $R > 0$  が存在して  $K \subset B_R(\mathbf{0})$  が成り立つ. ただし  $\mathbf{0} = (0, 0)$  である (一度有界であることが示されれば中心はどこでもよいことがわかる).
- 次に  $\{x_n\}$  を  $K$  の点列とし  $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$  とする.  $x_n \in K \subset B_R(\mathbf{0})$  より  $d_2(x_n, \mathbf{0}) < R$  である. よって

$$|x_1^{(n)}| = \sqrt{(x_1^{(n)} - 0)^2} \leq d_2(x_n, \mathbf{0}) < R$$

であるから実数列  $\{x_1^{(n)}\}$  は有界である.

- Bolzano-Weierstrass の定理 (定理 0.12) より  $\{x_1^{(n)}\}_n$  のある部分列  $\{x_1^{(n_k)}\}_k$  が存在して, それはある  $x_1^\infty \in \mathbb{R}$  に収束する.

- 次に

$$|x_2^{n(k)}| = \sqrt{(x_2^{n(k)} - 0)^2} \leq d_2(\mathbf{x}_{n(k)}, \mathbf{0}) < R$$

であるから  $\{x_2^{n(k)}\}_k$  は有界である.

- したがって再び Bolzano-Weierstrass の定理より  $\{x_2^{n(k)}\}_k$  はある部分列  $\{x_2^{n(k(l))}\}_l$  が存在してそれはある  $x_2^\infty \in \mathbb{R}$  に収束する. このとき  $\{x_1^{n(k)}\}_k$  は  $x_1^\infty \in \mathbb{R}$  に収束するのでその部分列  $\{x_1^{n(k(l))}\}_l$  も  $x_1^\infty$  に収束することに注意する.
- したがって  $\mathbf{x}_{n(k(l))} = (x_1^{n(k(l))}, x_2^{n(k(l))})$  は  $\mathbf{x}_\infty = (x_1^\infty, x_2^\infty)$  に収束する.
- $\{\mathbf{x}_{n(k(l))}\}_l$  は  $K$  の点列で,  $K$  は閉集合であるから命題 2.6 より  $\mathbf{x}_\infty \in K$  である.  
□

### 定義

$(X, d)$  を距離空間とする.  $K \subset X$  ( $K \neq \emptyset$ ) が点列コンパクトであるとは  $K$  の任意の点列  $\{x_n\}$  に対して, ある  $K$  の点に収束する  $\{x_n\}$  の部分列が存在することである.

**例**  $(\mathbb{R}^N, d_2)$  を考える.  $K \subset \mathbb{R}^N$  を有界閉集合とすると命題 4.1 より  $K$  は点列コンパクトである.

- 以下  $(X, d)$  を距離空間とする.  $K \subset X$  が点列コンパクトであるならば  $K$  は有界閉集合であることを示そう.

### 命題 4.2

$K \subset X$  が点列コンパクトならば  $K$  は有界である.

### 証明

- $K$  が有界でない, つまり「どんな  $x \in X$ ,  $R > 0$  に対しても  $K \subset B_R(x)$  とできない」とする.
- $K$  の点列  $\{x_n\}$  を次のように定める:
  - (1)  $x_1 \in K$  を任意にとり,  $r_1 = 1$  とする.
  - (2)  $K \subset B_{r_1}(x_1) = B_1(x_1)$  とはできないので,  $x_2 \in K$  を  $d(x_2, x_1) \geq r_1 = 1$  となるようにとり,  $r_2 = d(x_2, x_1) + 1$  とする.
  - (3)  $K \subset B_{r_2}(x_1)$  とはできないので,  $x_3 \in K$  を  $d(x_3, x_1) \geq r_2$  となるようにとり,  $r_3 = d(x_3, x_1) + 1$  とする.
  - (n) 以下  $x_{n-1} \in K$ ,  $r_{n-1} > 0$  から  $x_n \in K$  を  $d(x_n, x_1) \geq r_{n-1}$  となるようにとり,  $r_n = d(x_n, x_1) + 1$  とする. このとき  $r_n \geq r_{n-1} + 1 \geq r_{n-1}$  である.

- この点列  $\{x_n\}$  は

$$m > n \geq 1 \Rightarrow d(x_m, x_n) \geq 1$$

を満たす. 実際,  $m > n \geq 1$  ならば

$$d(x_m, x_1) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, x_1)$$

より

$$d(x_m, x_n) \geq d(x_m, x_1) - d(x_n, x_1) \geq r_{m-1} - d(x_n, x_1) \geq r_n - d(x_n, x_1) = 1$$

- したがって  $\{x_n\}$  のいかなる部分列も Cauchy 列とはならない.
- 一方,  $\{x_n\}$  は点列コンパクト集合  $K$  の点列であるので収束する部分列をもつが, これは矛盾である.  $\square$

#### 命題 4.3

$K \subset X$  が点列コンパクトならば  $K$  は閉集合である.

#### 証明

- $\bar{K} \subset K$  を示せばよいので  $x \in \bar{K}$  を任意にとる.
- このとき  $\forall \varepsilon > 0 : K \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$
- $\varepsilon = 1/n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とすると各  $n$  に対して  $K \cap B_{1/n}(x) \neq \emptyset$  であるから, 各  $n$  に対して

$$x_n \in K \cap B_{1/n}(x)$$

となる  $x_n$  がとれる.

- $d(x_n, x) < 1/n$  より  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  である.
- $K$  は点列コンパクトであるから  $\{x_n\}$  のある部分列  $\{x_{n_k}\}_k$  が存在して, それは  $K$  のある  $x' \in K$  に収束する. しかし  $\{x_n\}$  自身  $x$  に収束するので  $\{x_{n_k}\}_k$  も  $x$  に収束する. したがって極限の一意性より  $x = x' \in K$  である.
- 以上より  $\bar{K} \subset K$  が示された.

#### 注

- 有界閉集合であっても点列コンパクトであるとは限らない (後に述べる)
- $X$  自身が点列コンパクト集合であるとき  $(X, d)$  は (点列) コンパクト距離空間であるという.

## 4.2 全有界性

点列コンパクトの別の表現を学ぶ.

### 定義

$(X, d)$  を距離空間,  $K \subset X$  とする.  $K$  が**全有界**であるとは

任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, ある (有限個の)  $K$  の点  $x_1, \dots, x_p \in K$  が存在して

$$K \subset \bigcup_{i=1}^p B_\varepsilon(x_i)$$

が成り立つことである.

- 定義から「全有界  $\Rightarrow$  有界」であるが, 逆は成り立たない (課題).

### 命題 4.4

$(X, d)$  を距離空間,  $K \subset X$  が点列コンパクトであるならば全有界である.

### 証明

- $K$  を点列コンパクト集合とし,  $K$  が全有界でないとする:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1, \dots, x_p \in K \text{ such that } K \not\subset \bigcup_{i=1}^p B_\varepsilon(x_i)$$

でない, つまり

ある  $\varepsilon_0 > 0$  が存在して, どんなに有限個の点  $x_1, \dots, x_p \in K$  をとっても  $K \subset \bigcup_{i=1}^p B_{\varepsilon_0}(x_i)$  とできない

と仮定する.

- $x_1 \in K$  を任意にとる.
- $K \subset B_{\varepsilon_0}(x_1)$  とはできないので,  $x_2 \in K \setminus B_{\varepsilon_0}(x_1)$  をとる. このとき  $d(x_2, x_1) \geq \varepsilon_0$  である.
- $K \subset B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2)$  とはできないので  $x_3 \in K \setminus (B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2))$  をとる. このとき

$$d(x_3, x_1) \geq \varepsilon_0, \quad d(x_3, x_2) \geq \varepsilon_0$$

- 以下,  $x_n$  を  $x_n \in K \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} B_{\varepsilon_0}(x_i) \right)$  となるようにとる. このとき

$$d(x_n, x_i) \geq \varepsilon_0 \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

が成り立つ.

- 点列  $\{x_n\}$  は  $m > n$  ならば  $x_m \notin \bigcup_{i=1}^{m-1} B_{\varepsilon_0}(x_i)$  特に  $x_m \notin B_{\varepsilon_0}(x_n)$  を満たすので  $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon_0$  である.
- したがって  $\{x_n\}$  のいかなる部分列も収束しえない. 実際,  $\{x_n\}$  のある部分列  $\{x_{n_k}\}$  が収束すればそれは Cauchy 列である. しかし,  $k > l$  ならば

$$d(x_{n_k}, x_{n_l}) \geq \varepsilon_0$$

であるので Cauchy になり得ない.

- 一方  $\{x_n\}$  は点列コンパクト集合  $K$  の点列であるので収束部分列をもつはずである. したがって矛盾である.  $\square$

#### 命題 4.5

$(X, d)$  を距離空間,  $K \subset X$  は全有界であり, かつ, 距離空間  $(K, d)$  が完備であるならば  $K$  は点列コンパクトである. (距離空間  $(K, d)$  を考えるので  $K$  は空でない)

**注**  $(X, d)$  が完備距離空間で,  $K \subset X$  が空でないとする

$K$  : 点列コンパクト  $\Leftrightarrow K$  : 全有界 かつ 閉集合

#### 証明

- $K$  は条件を満たすとする.  $K$  は全有界であるので

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_1, \dots, a_p \in K \text{ such that } K \subset \bigcup_{i=1}^p B_{\varepsilon/2}(a_i) \quad (4.1)$$

が成り立つ.

- $\{x_n\}$  を  $K$  の点列とし, 以下, いわゆる「対角線論法」を用いる.
- $\varepsilon = 1$  として (4.1) を用いると,  $K$  は有限個の  $K$  の点を中心とする  $\frac{1}{2}$ -近傍で覆われる. その中の少なくとも1つには  $\{x_n\}$  の項が無限個ある. そのような  $\frac{1}{2}$ -近傍を1つとり, その中に入っている  $\{x_n\}$  の項の番号  $n$  を小さいほうから  $n_1(k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) とすれば  $\{x_n\}$  の部分列  $\{x_{n_1(k)}\}$  ができる. このとき  $d(x_{n_1(k)}, x_{n_1(l)}) < 1$  ( $k, l \geq 1$ ) である ( $\frac{1}{2}$ -近傍の中心をはさんで三角不等式を用いよ.)

- 次に  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  として (4.1) を用いると,  $K$  は有限個の  $K$  の点を中心とする  $\frac{1}{4}$ -近傍で覆われる. その中の少なくとも 1 つには  $\{x_{n_1(k)}\}$  の項が無数個ある. そのような  $\frac{1}{4}$ -近傍を 1 つとり, その中に入っている  $\{x_{n_1(k)}\}$  の項の番号たち  $n_1(k)$  を小さいほうから  $n_2(k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) とすれば  $\{x_{n_1(k)}\}$  の部分列  $\{x_{n_2(k)}\}$  ができる.

たとえば

$$n_1(1) = 1, n_1(2) = 5, n_1(3) = 7, n_1(4) = 9, \dots$$

のうち,  $x_5 = x_{n_1(2)}, x_9 = x_{n_1(4)}, \dots$  が選んだ  $\frac{1}{4}$ -近傍に入っているならば

$$n_2(1) = 5, n_2(2) = 9$$

とするのである.  $\{x_n\}$  の項を飛ばし飛ばしで選んだ  $\{x_{n_1(k)}\}$  であり, それをさらに飛ばし飛ばしで選んで  $\{x_{n_2(k)}\}$  をつくっている. なので  $\{x_{n_2(k)}\}$  は当然元の点列  $\{x_n\}$  の部分列である.

よって  $\{n_1(k)\} \supset \{n_2(k)\}$  である. また  $d(x_{n_2(k)}, x_{n_2(l)}) < 1/2$  ( $k, l \geq 1$ ) である.

- さらに  $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$  として (4.1) を用いると,  $K$  は  $K$  の点を中心とする  $\frac{1}{2^3}$ -近傍で覆われる. その中の少なくとも 1 つには  $\{x_{n_2(k)}\}$  の項が無数個ある. そのような  $\frac{1}{2^3}$ -近傍を 1 つとり, その中に入っている  $\{x_{n_2(k)}\}$  の項の番号  $n_2(k)$  を小さい順に並べたものを  $n_3(k)$  とすると  $\{n_2(k)\} \supset \{n_3(k)\}$  であり,  $\{x_{n_2(k)}\}$  の部分列  $\{x_{n_3(k)}\}$  ができる. このとき  $d(x_{n_3(k)}, x_{n_3(l)}) < \frac{1}{2^2}$  ( $k, l \geq 1$ ) である.
- 以下同様に  $\{x_{n_i(k)}\}$  の部分列  $\{x_{n_{i+1}(k)}\}$  で

$$d(x_{n_{i+1}(k)}, x_{n_{i+1}(l)}) < \frac{1}{2^i}$$

を満たすものをつくれる.

- そこで  $n(k) = n_k(k)$  とし,  $\{x_{n(k)}\}$  は  $\{x_n\}$  の部分列であり,  $k \geq l$  ならば

$$d(x_{n(k)}, x_{n(l)}) = d(x_{n_k(k)}, x_{n_l(l)}) < \frac{1}{2^{l-1}}$$

である ( $k \geq l$  より  $\{x_{n_k(k)}\}$  は  $\{x_{n_l(k)}\}$  の部分列であることに注意せよ). よって  $\{x_{n(k)}\}$  は Cauchy 列である.

- $(K, d)$  は完備であるので  $\{x_{n(k)}\}$  はある  $x_\infty \in K$  に収束する. よって  $K$  は点列コンパクトである.  $\square$

### 注

- (1) 「 $A$  が全有界  $\Leftrightarrow \overline{A}$  が全有界」である.
- (2)  $A \subset X$  について  $\overline{A}$  が (点列) コンパクトであるとき,  $A$  は**相対コンパクト**であるという. 命題 4.5 によると,  $(X, d)$  が完備距離空間で  $A$  が全有界であれば相対コンパクトである.

### 4.3 点列コンパクト性と開被覆によるコンパクト性

- $(X, d)$  を距離空間,  $A \subset X$  とする.  $(X, d)$  の開集合の族  $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

を満たすとき,  $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を  $A$  の開被覆という.

- 証明は略すが次のことが成り立つ.

#### 定理 4.6

$(X, d)$  を距離空間とする.  $K \subset X$  が点列コンパクトであるための必要十分条件は  $K$  の任意の開被覆  $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  に対して, その中のある有限個の  $O_{\lambda_1}, \dots, O_{\lambda_n}$  を用いて

$$K \subset O_{\lambda_1} \cup O_{\lambda_2} \cup \dots \cup O_{\lambda_n}$$

とできることである (この性質, つまり任意の開被覆から有限個を選んで  $A$  を覆うことができるという性質を単にコンパクトという).

### 4.4 連続写像・関数と点列コンパクト性

- $(X, d_X), (Y, d_Y)$  を距離空間とし,  $f: X \rightarrow Y$  を連続写像とする.

#### 復習

- $f: X \rightarrow Y$  が  $x_0 \in X$  で連続であるとは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

- $f: X \rightarrow Y$  が  $x_0 \in X$  で連続

$$\{x_n\}: X \text{ の点列, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

#### 命題 4.7

$(X, d_X), (Y, d_Y)$  を距離空間,  $f: X \rightarrow Y$  を連続写像とする.  $K \subset X$  ( $K \neq \emptyset$ ) が点列コンパクトであるならば

$$f(K) = \{y \in Y \mid y = f(x) (x \in K)\}$$

は  $(Y, d_Y)$  における点列コンパクト集合である.

**証明**

- $\{y_n\}$  を  $f(K)$  の任意の点列とする. このとき,  $f(K)$  の定義から  $y_n = f(x_n)$  ( $x_n \in K$ ) となる  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が存在する.
- $K$  は点列コンパクトであるから  $K$  の点列  $\{x_n\}$  はある  $x_\infty \in K$  に収束する部分列  $\{x_{n_k}\}$  が存在する.
- $f$  は連続写像であるから  $\{y_n\}$  の部分列  $\{y_{n_k}\}$  は

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_\infty)$$

を満たす.  $\{y_n\}$  は収束部分列を持つことがわかった. 以上より  $f(K)$  は点列コンパクトである.  $\square$

- $Y = \mathbb{R}$ ,  $d_Y(x, y) = |x - y|$  のとき  $f: X \rightarrow Y$  すなわち  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  は関数といい,  $f$  が連続写像であるとき, **連続関数**であるという.
- $A \subset X$  ( $A \neq \emptyset$ ) とする. ある  $x_0 \in A$  があって

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (x \in A)$$

が成り立つとき  $f(x_0)$  を  $f$  の  $A$  上 ( $A$  における) **最大値**といい  $\max_{x \in A} f(x)$  と表す. 最小値も不等号の向きを逆にすることにより定義され  $\min_{x \in A} f(x)$  と表す.

**定理 4.8**

$(X, d)$  を距離空間,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  を連続関数とする.  $K \subset X$  ( $K \neq \emptyset$ ) が点列コンパクトであるとする.  $f$  は  $K$  において最大値・最小値をとる, つまり, ある  $x_*$ ,  $x^* \in K$  が存在して

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad (x \in K)$$

が成り立つ.

**証明**

- 命題 4.7 より  $f(K)$  は  $\mathbb{R}$  の点列コンパクト集合である. したがって命題 4.2 と命題 4.3 より  $f(K) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in K\}$  は  $\mathbb{R}$  の有界閉集合である. したがって  $m_0 = \sup\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in K\}$  が存在する.
- 上限の特徴づけから任意の  $n \in \mathbb{R}$  に対して

$$m_0 - \frac{1}{n} < y \leq m_0$$

となる  $y \in \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in K\}$  が存在する. 各  $n \in \mathbb{N}$  に対してこのような  $y$  を  $y_n$  とおく:

$$m_0 - \frac{1}{n} < y_n \leq m_0, \quad y_n \in f(K)$$

である. これより  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = m_0$  で  $f(K)$  は閉集合であるから命題 2.6 より  $m_0 \in f(K)$  つまり  $m_0 = f(x^*)$  となる  $x^* \in K$  が存在する.

- 最小値をとることも同様に示すことができる.  $\square$

コンパクト性と連続写像の関係においても一つ重要な「一様連続性」という概念があるが, すでにこの節が盛りだくさんとなってしまったため, 次の節で扱うこととする.