複素関数論Ⅱ講義資料

神奈川大学理学部　松澤　寛

目 次

1　正則関数・複素積分・Cauchy の積分定理

1.1　正則関数（復習 $+\alpha$）

- $D \subset \mathbb{C}$ を領域（連結な開集合）とする．
- 関数 $f : D \to \mathbb{C}$ $(w = f(z))$ を考える．
- f が $z_0 \in D$ で**微分可能**であるとは

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

  が存在することである．このとき，この極限値を $f'(z_0)$ とかく．
- f が $z_0 \in D$ で微分可能であるとき

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), & z \in D \setminus \{z_0\}, \\ 0, & z = z_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

  とおくと $g(z)$ は z_0 で連続で

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$$

  が成り立つ．
- $z = x + iy$ （x, y は実数）とおくと $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ （u, v は実数値関数）とかける．このとき，f が $z = z_0 = x_0 + iy_0$ で微分可能であるならば u, v は次の **Cauchy-Riemann の関係式**をみたす：

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

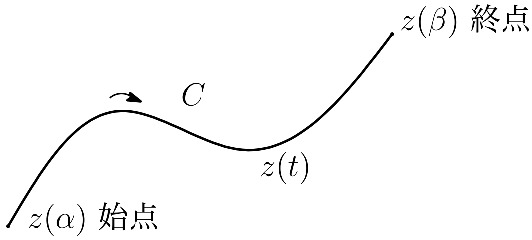
- f が D の各点で微分可能であるとき，f は $\underline{D\ で}$**正則**であるという．
- f が $\underline{1\ 点\ z_0 \in \mathbb{C}\ で}$**正則**であるとは，$z_0$ のある $\varepsilon-$ 近傍 $U_\varepsilon(z_0)$ で正則であることである．

1.2　複素積分（復習）

- $\mathbb{C}$ 上の**連続曲線**は

$$C : z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$$

  （$x(t)$, $y(t)$: 実数値連続関数）と表される．$z(\alpha)$ を C の**始点**, $z(\beta)$ を C の**終点**という．



- $x(t), y(t)$ が微分可能で $x'(t), y'(t)$ が連続（このとき $x(t), y(t)$ は $\boldsymbol{C^1}$ **級**であるといわれる），さらに全ての t に対して $z'(t) \neq 0$ であるとき C は**滑らかな曲線**であるといわれる．

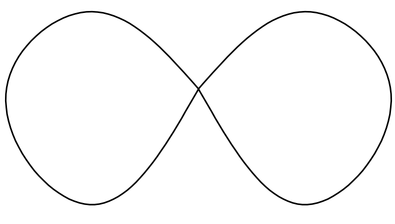
- f が連続，$C: z = z(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ が滑らかな曲線であるとき，
$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$
と定義し，f の曲線 C に沿う**複素積分**という．

- f が領域 D で**原始関数**をもつ，すなわち D で正則な関数 $F(z)$ があって D で $F'(z) = f(z)$ が成り立つとき，$C: z = z(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ に対して
$$\int_C f(z)dz = F(z(\beta)) - F(z(\alpha))$$
つまり，f が領域 D で連続で，原始関数 F をもつとき，f の曲線 C に沿う複素積分の値は始点と終点での F の値だけで定まる．

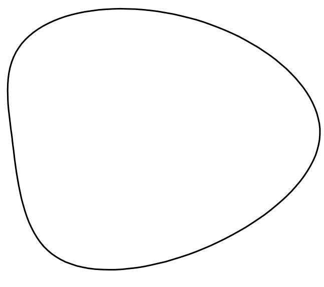
- $C: z = z(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ を滑らかな曲線，f が C 上の各点で連続であるとき，ある $M > 0$ が存在して $|f(z)| \leq M$ $(z \in C)$ が成り立つ．このとき次の**複素積分の評価式**
$$\left| \int_C \boldsymbol{f(z)dz} \right| \leq \boldsymbol{ML} \quad (\boldsymbol{L} \text{ **は** } \boldsymbol{C} \text{ **の長さ**}) \tag{1.2}$$
が成り立つ．この評価式は頻繁に用いる．

- 逆向きの曲線，曲線の和，区分的に滑らかな曲線，複素積分の諸性質については，複素関数論 I のノートかテキストを参照のこと．

- 曲線 $C: z = z(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ は $z(\alpha) = z(\beta)$ である曲線を**閉曲線**という．始点と終点以外で自分自身と共有点をもたない閉曲線を**単純閉曲線（Jordan 閉曲線）**という．単純閉曲線はそれにより囲まれる領域を左手に見て進む向きを**正の向き**と定める．



閉曲線



単純閉曲線

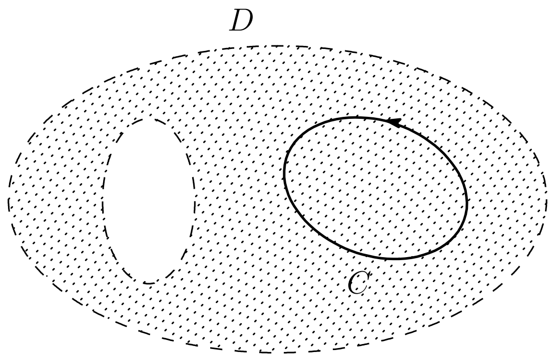
1.3 Cauchy の積分定理

定理 1.1(Cauchy の積分定理)

f は領域 D で正則，C を D 内の単純閉曲線で C の内部は全て D の点とする．このとき

$$\int_C f(z)dz = 0$$

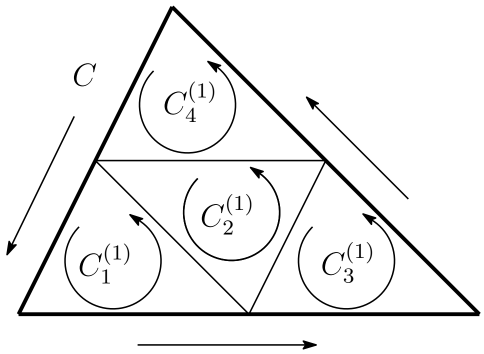
が成り立つ．



注 ベクトル解析の Green の定理を用いた証明は f' の連続性を用いている．f' の連続性を仮定しない（Green の定理を用いない）証明は Goursat による．

証明の流れは次の 3 段階で行われる：
Step 1: C が三角形の場合（Key）
Step 2: C が多角形の場合（Step 1 から直ちに導かれる）
Step 3: C が一般の場合（一様連続性を用いる）

$\boxed{\textbf{証明}}$ **Step 1:** C を三角形とし，C の周の長さを L とする．



- C の各辺の中点をとり，４つの三角形に分け，周を $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, C_3^{(1)}, C_4^{(1)}$ とすると

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1^{(1)}} f(z)dz + \int_{C_2^{(1)}} f(z)dz + \int_{C_3^{(1)}} f(z)dz + \int_{C_4^{(1)}} f(z)dz$$

- $\left|\int_{C_i^{(1)}} f(z)dz\right|$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ のうち一番大きいものを $\left|\int_{C^{(1)}} f(z)dz\right|$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)dz\right| &\leq \left|\int_{C_1^{(1)}} f(z)dz\right| + \left|\int_{C_2^{(1)}} f(z)dz\right| + \left|\int_{C_3^{(1)}} f(z)dz\right| + \left|\int_{C_4^{(1)}} f(z)dz\right| \\ &\leq 4\left|\int_{C^{(1)}} f(z)dz\right|\end{aligned}$$

- $C^{(1)}$ の各辺の中点をとり，４つの三角形に分け，周を $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, C_3^{(2)}, C_4^{(2)}$ とすると

$$\int_{C^{(1)}} f(z)dz = \int_{C_1^{(2)}} f(z)dz + \int_{C_2^{(2)}} f(z)dz + \int_{C_3^{(2)}} f(z)dz + \int_{C_4^{(2)}} f(z)dz$$

- $\left|\int_{C_i^{(2)}} f(z)dz\right|$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ のうち一番大きいものを $\left|\int_{C^{(2)}} f(z)dz\right|$ とおく．このとき

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{C^{(1)}} f(z)dz\right| \leq 4^2\left|\int_{C^{(2)}} f(z)dz\right|$$

- 以下繰り返すことにより三角形の列 $C^{(1)}, C^{(2)}, \cdots, C^{(n)}, \cdots$ ができる．$C^{(n)}$ で囲まれる閉三角形を Δ_n とすると

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \cdots$$

であり，

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{C^{(n)}} f(z)dz\right|$$

が成り立つ．

- 区間縮小法の原理（多次元版）（補足参照）より $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ は 1 点 z_0 からなる．
- f は z_0 で微分可能であるから (1.1) より

$$\begin{cases} f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0) \\ g(z_0) = 0 \end{cases}$$

なる z_0 で連続な関数 g が存在する．

- g は z_0 で連続であるから，任意に $\varepsilon > 0$ を決めると，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(z) - g(z_0)| < \varepsilon \ \ \text{つまり} \ \ |g(z)| < \varepsilon$$

が成り立つ．

- $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$ であるから

$$\begin{aligned} &\left|\int_{C^{(n)}} f(z)dz\right| \\ =&\left|\int_{C^{(n)}} \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)\}dz\right| \\ \leq&\left|\int_{C^{(n)}} \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\}dz\right| + \left|\int_{C^{(n)}} g(z)(z - z_0)dz\right| \end{aligned}$$

- ここで $f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ は 1 次関数であるから原始関数をもつ．したがって

$$\int_{C^{(n)}} \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\}dz = 0$$

よって

$$\left|\int_{C^{(n)}} f(z)dz\right| \leq \left|\int_{C^{(n)}} g(z)(z - z_0)dz\right|$$

- n が十分大きいとき，$z \in C^{(n)} \Rightarrow |z - z_0| < L_n(< \delta)$, $|g(z)| < \varepsilon$ が成り立つ．ただし L_n は $C^{(n)}$ の周の長さで $L/2^n$ である．
- これより (1.2) から

$$\left|\int_{C^{(n)}} g(z)(z - z_0)dz\right| \leq \varepsilon L_n^2 = \varepsilon \frac{L^2}{4^n}$$

したがって

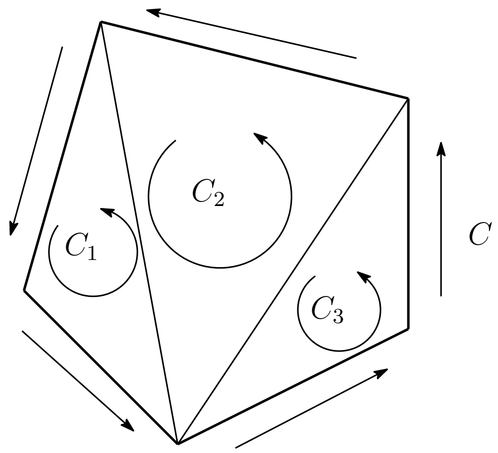
$$\left|\int_{C^{(n)}} f(z)dz\right| \leq \varepsilon \frac{L^2}{4^n}$$

- 以上より

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{C^{(n)}} f(z)dz\right| < \varepsilon L^2$$

ε は任意より $\displaystyle\int_C f(z)dz = 0$ が成り立つ．(Step 1 終了)

Step 2: C が多角形の場合



例えば C がこのような五角形の場合

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz = 0 + 0 + 0 = 0$$

Step 3: C が一般の場合

- D は有界な領域であると仮定してよい．∂D と C の距離を ρ とおく：

$$\rho = \inf\{|z - z'| : z \in C, z' \in \partial D\}$$

- $K(\subset D)$ を次のように定める：

$$K := \{z \in \mathbb{C} : \inf_{\zeta \in C} |z - \zeta| \leq \rho/2\} = \{z \in \mathbb{C} : \min_{\zeta \in C} |z - \zeta| \leq \rho/2\}$$

直感的には曲線までの最短距離が $\rho/2$ 以内であるような点の集合である．このとき $K \subset D$ であり，有界閉集合である（補足参照）.

- f は<u>有界閉集合 K で連続</u>であるから<u>一様連続</u>である（補足参照）：

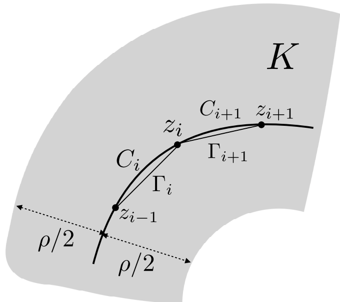
$$^{\forall}\varepsilon > 0 \quad ^{\exists}\delta > 0 : |z - z'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z')| < \varepsilon$$

さらに δ は $\delta < \rho/2$ としてよい（δ は小さい分には構わない）.

- $\varepsilon > 0$ を任意にとり，C 上の点 $z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_{n-1}$ を次のようにとる（ただし $z_n = z_0$ とする）

– 各 $i = 1, 2, \cdots, n$ につき C の z_{i-1} と z_i を結ぶ部分弧 C_i の長さが δ 未満

- また，各 $i = 1, 2, \cdots, n$ につき z_{i-1} と z_i を結ぶ線分を Γ_i とする．このとき $z \in \Gamma_i$ とすると z から C の最短距離は $|z_{i-1} - z_i| (< \delta < \rho/2)$ を超えないので $\Gamma_i \subset K$ である．



- 次に $z \in C_i \Rightarrow |z - z_i| < \delta$ であるから
$$|f(z) - f(z_i)| < \varepsilon \quad \text{on} \quad C_i$$
が成り立つ．

- また $z \in \Gamma_i$ ならば z から C までの最短距離は $|z_{i-1} - z_i| (< \delta < \rho/2)$ を超えないので $\Gamma_i \subset K$ が成り立つ．

- 複素積分の評価式より (1.2) より
$$\left| \int_{C_i} \{f(z) - f(z_i)\} dz \right| \leq \varepsilon L_i \quad (L_i \ : \ C_i \text{ の長さ})$$

- 一方
$$\begin{aligned} \int_{C_i} \{f(z) - f(z_i)\} dz &= \int_{C_i} f(z) dz - f(z_i) \int_{C_i} dz \\ &= \int_{C_i} f(z) dz - f(z_i)(z_i - z_{i-1}) \end{aligned}$$
だから
$$\left| \int_{C_i} f(z) dz - f(z_i)(z_i - z_{i-1}) \right| \leq \varepsilon L_i$$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z) dz = \int_C f(z) dz$ だから
$$\left| \int_C f(z) dz - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(z_i - z_{i-1}) \right| \leq \varepsilon L \tag{1.3}$$
ただし $L = L_1 + \cdots + L_n$ で C の長さである．

- また $z \in \Gamma_i$ ならば $|z-z_i|<\delta$ より $|f(z)-f(z_i)|<\varepsilon$ であるから Γ を $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n = z_0$ を結んでできる折れ線として同様に

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz - \sum_{i=1}^n f(z_i)(z-z_{i-1}) \right| \leq \varepsilon L' < \varepsilon L \tag{1.4}$$

ただし L' は Γ の長さで $L' < L$ に注意．(1.3), (1.4) より

$$\begin{aligned} &\left| \int_C f(z)dz - \int_\Gamma f(z)dz \right| \\ \leq &\left| \int_C f(z)dz - \sum_{i=1}^n f(z_i)(z_i-z_{i-1}) \right| + \left| \sum_{i=1}^n f(z_i)(z_i-z_{i-1}) - \int_\Gamma f(z)dz \right| \\ \leq &2\varepsilon L \end{aligned} \tag{1.5}$$

- ところで Step 2 より $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0$ であるので

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq 2\varepsilon L$$

ε は任意だから $\displaystyle\int_C f(z)dz = 0$ が成り立つ．□

注 (1.5) は C 上の線積分は折れ線上の線積分でいくらでも近似できることを意味している．この式だけであれば f の（一様）連続性のみで良い．

1.4　補足

1.4.1　区間縮小法

通常（１次元）の区間縮小法は以下のものであった．

区間縮小法の原理（１次元）

有界閉区間の列 $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対し

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots$$

を満たすとき全ての $[a_n, b_n]$ に含まれる実数が存在する，つまり

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

特に $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ であるとき，ある実数 a があって

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{a\}$$

が成り立つ.

複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合 A の**直径**を次で定義する:

$$\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} |x - y|$$

区間縮小法の原理（平面）

$\mathbb{C}$ の空でない有界閉集合の列 F_n $(n = 1, 2, \cdots)$ に対し

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \cdots$$

を満たすとき全ての F_n に含まれる実数が存在する，つまり

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$$

特に $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(F_n) = 0$ であるとき，ある $a \in \mathbb{C}$ があって

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$$

が成り立つ.

1.4.2　集合 K について（細かいことまできちんと証明したい人向け）

- Cauchy の積分定理の証明 (Step 3) で導入した集合

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \inf_{\zeta\in C} |z - \zeta| \leq \rho/2\} = \{z \in \mathbb{C} : \min_{\zeta\in C} |z - \zeta| \leq \rho/2\}$$

が有界閉集合であることを確認しよう.

- 閉曲線 C は $\mathbb{C}$ の有界閉集合である（52 ページをみよ）．
- したがって $z \in \mathbb{C}$ を固定したとき C 上の関数 $f(\zeta) = |z - \zeta|$ は C 上で最小値をとる．したがって inf は min となる．
- C が有界であるから K も有界であることはほぼ明らかであろう．
  - 有界でなければ $z_n \in K$ で $|z_n| \to \infty$ となる $\{z_n\}$ がある．
  - z_n に対して z_n から C への最短距離を与える C の点を 1 つとり ζ_n とする：$|z_n - \zeta_n| = \min_{\zeta \in C} |z_n - \zeta|$ である．$z_n \in K$ より $|z_n - \zeta_n| \le \rho/2$ である．
  - $\zeta_n \in C$ で C は有界閉集合（コンパクト集合）なので $\{\zeta_n\}$ は C のある点 ζ_* に収束部分列 $\{\zeta_{n_k}\}$ をもつ．
  - $|z_{n_k}| \le |z_{n_k} - \zeta_{n_k}| + |\zeta_{n_k}| \le \rho/2 + |\zeta_{n_k}|$ であるが $k \to \infty$ で矛盾
- K は閉集合であることを示そう．
  - $z_n \in K, z_n \to z \ (n \to \infty)$ とする．
  - z_n に対して z_n から C への最短距離を与える C の点を 1 つとり ζ_n とする：$|z_n - \zeta_n| = \min_{\zeta \in C} |z_n - \zeta|$ である．$z_n \in K$ より $|z_n - \zeta_n| \le \rho/2$ である．
  - $\zeta_n \in C$ で C は有界閉集合（コンパクト集合）なので $\{\zeta_n\}$ は C のある点 ζ_* に収束部分列 $\{\zeta_{n_k}\}$ をもつ．
  - $|z - \zeta_*| \le \lim_{k \to \infty} |z_{n_k} - \zeta_{n_k}| \le \rho/2$ である．
  - したがって $\min_{\zeta \in C} |z - \zeta| \le \rho/2$ であり $z \in K$ となる．

1.4.3　一様連続性

解析学において「一様○○」という概念はとても重要である．解析学を志す学生はしっかり理解してほしい．その一つ，一様連続を紹介しよう．

$\mathbb{C}$ の部分集合 A で定義された関数 f を考える．f が 1 点 $z_0 \in \mathbb{C}$ で**連続**であるとは

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

が成り立つことであった．これを $\varepsilon - \delta$ 式に述べると次のようになる：

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$z \in A$ が $|z - z_0| < \delta$ を満たせば $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ が成り立つ．

ここで注意することは，上の「ある $\delta > 0$ が存在して」というところである．1 点 z_0 を指定してそこで連続かどうかを議論しているので，δ は ε だけでなく，あらかじめ指定した点 z_0 にも依存している．それに対し，f が A 上で**一様連続**であるとは

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$z, z' \in A$ が $|z - z'| < \delta$ を満たせば $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ が成り立つ.

このとき上で定まる δ は ε のみにしか依存していない．とにかく2点の距離さえ近ければ関数の値も近いと言っているのである．一様連続性について次のことが知られている：

定理（一様連続性）

$\mathbb{C}$ の有界閉集合 K で定義された連続関数は一様連続である.

実は，1変数関数の微積分で有界閉区間で連続な関数は積分可能という事実は連続関数が有界閉区間上では自動的に一様連続になるという事実に基づいている．一様〇〇については後期の「応用数理I」でも講義する予定である.

2　Cauchy の積分公式

2.1　前回の復習 $(+\alpha)$

Cauchy の積分定理は次のような定理であった：

定理 (Cauchy の積分定理)

f は領域 D で正則，C を D 内の単純閉曲線で C の内部は全て D の点とする．このとき

$$\int_C f(z)dz = 0$$

が成り立つ．

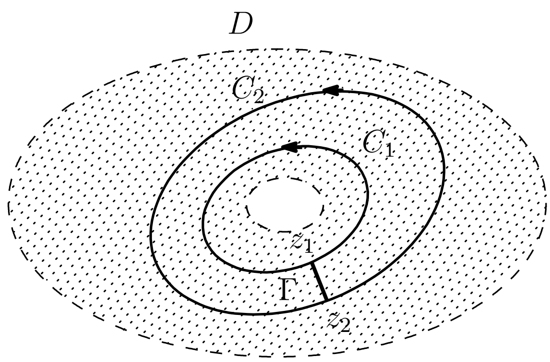
Cauchy の積分定理を用いると次のことが導かれる．

命題 2.1

f は領域 D で正則とする．D 内の 2 つの単純閉曲線 C_1, C_2 について，C_1 は C_2 の内部にあるとする．C_1 と C_2 で囲まれる部分が D のみからなる時

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

が成り立つ．



証明

- C_1, C_2 にそれぞれ z_1, z_2 をとり，z_2 と z_1 を曲線 Γ で結ぶ．このとき曲線

$$C : C_2 + \Gamma + (-C_1) + (-\Gamma)$$

　を考える．

- C で囲まれる部分が D の点のみからなるので Cauchy の積分定理より

$$\int_C f(z)dz = 0$$

- よって

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_2+\Gamma+(-C_1)+(-\Gamma)} f(z)dz = 0 \\
&\int_{C_2} f(z)dz + \int_{\Gamma} f(z)dz + \int_{-C_1} f(z)dz + \int_{-\Gamma} f(z)dz = 0 \\
&\int_{C_2} f(z)dz + \int_{\Gamma} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - \int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \\
&\int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz
\end{aligned}
$$

□

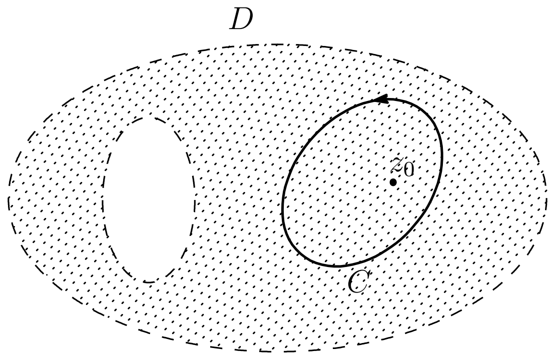
2.2 Cauchy の積分公式 (1)

定理 2.2(Cauchy の積分公式)

f は領域 D で正則とする．$z_0 \in D$ とし，z_0 を内部に含む（区分的に滑らかな）D 内の単純閉曲線 C に対し，C の内部は全て D の点とする．このとき

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

が成り立つ．

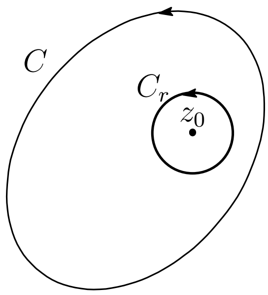


注 C の内部の点の値は C 上の値で決まってしまう．

証明

- 図のように，C の内部に含まれる z_0 中心，半径 r の円 C_r を考える：

$$C_r : z = z_0 + re^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$



- 関数 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ は $D\backslash\{z_0\}$ で正則で，C と C_r で囲まれる部分は $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ が正則である $D\backslash\{z_0\}$ の点のみからなるので命題 2.1 より

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}dz \tag{2.1}$$

- 等式 (2.1) の右辺を次のように変形する：

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz + \int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz \tag{2.2}$$

- 直接計算から第 2 項は

$$\int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = f(z_0)\int_{C_r} \frac{dz}{z-z_0} = f(z_0)2\pi i = 2\pi f(z_0)i$$

- 次に (2.2) の第 1 項を考える．f は z_0 で連続であるから，任意に $\varepsilon > 0$ をとると，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|z-z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ．

- C_r の半径 r を $0 < r < \delta$ とすれば C_r 上の z に対し $|z-z_0| = r < \delta$ であるから

$$|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon \ \ \text{on} \ \ C_r$$

が成り立つ．

- これより

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{r} \le \frac{\varepsilon}{r} \ \ \text{on} \ \ C_r$$

- よって複素積分の評価公式 (1.2) より

$$\left|\int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{\varepsilon}{r} \times 2\pi r = 2\pi\varepsilon$$

- (2.1), (2.2) より

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz + 2\pi f(z_0)i$$
$$\left|\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi f(z_0)i\right| \leq 2\pi\varepsilon$$

ところが上の式の左辺は 0 以上で ε とは無関係であるから

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi f(z_0)i = 0$$

つまり

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

が成り立つ．

□

2.3 Cauchy の積分公式 (2)

定理 2.3(Cauchy の積分公式の微分形)

定理 2.2 と同じ条件を仮定する．f は何回でも微分可能であって次が成り立つ：

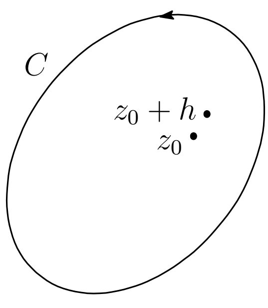
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

証明 $n = 1, 2$ の場合のみ証明する．

$n = 1$ のとき： z_0 を C の内部の任意の点とする．

- 定理 2.2 から

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$



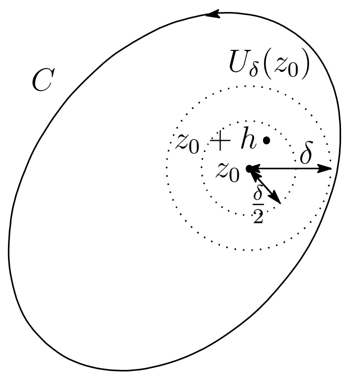
- $|h|$ が十分小さければ z_0+h も C の内部の点であるので同じく定理 2.2 より
$$f(z_0+h)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-(z_0+h)}dz$$
が成り立つ.

- よって
$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}&=\frac{1}{2\pi ih}\int_C\left\{\frac{f(z)}{z-(z_0+h)}-\frac{f(z)}{z-z_0}\right\}dz\\&=\frac{1}{2\pi ih}\int_C f(z)\frac{h}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)}dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)}dz\end{aligned}$$

- 上の等式において $h\to 0$ のとき, $\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\to f'(z_0)$ である. したがって次のことを証明すればよい：
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

- そのために 2 つの差をとりそれが $h\to 0$ のとき 0 に収束することを示す.
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{1}{(z-z_0)^2}dz\\=&\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\left[\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)}-\frac{1}{(z-z_0)^2}\right]dz\\=&\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{h}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)^2}dz\\=&\frac{h}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)^2}dz\end{aligned}$$

- z_0 は C の内部の点であるから, $\delta>0$ を十分小さくとると $U_\delta(z_0)$ は C の内部にすっぽり含まれる. いいかえれば z_0 から距離 δ 以内には曲線 C の点がないようにできる：
$$|z-z_0|\geq\delta \quad \text{on} \quad C$$



- 次に $|h| < \delta/2$ とすれば三角不等式から

$$\begin{aligned}|z-(z_0+h)| &= |(z-z_0)-h| \\ &\geq |z-z_0| - |h| \geq \delta - \delta/2 = \delta/2 \quad \text{on} \quad C\end{aligned}$$

- C は有界閉集合より $|f(z)| \leq M$ on C となる $M > 0$ が存在する.

- よって C 上

$$\begin{aligned}&\left| f(z) \frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)^2} \right| \\ =&|f(z)| \frac{1}{|z-(z_0+h)||z-z_0|^2} \leq M \frac{1}{\frac{\delta}{2} \cdot \delta^2} = \frac{2M}{\delta^3}\end{aligned}$$

  よって複素積分の評価公式 (1.2) より C の長さを L とすれば

$$\left| \int_C f(z) \frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)^2} dz \right| \leq \frac{2M}{\delta^3} L$$

- 以上より

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{2\pi i} \int_C f(z) \frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)^2} dz = 0$$

  であるから

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \frac{1}{\{z-(z_0+h)\}(z-z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz$$

  がわかり，$n = 1$ の場合，公式が成り立つことが示された.

$n = 2$ の場合：

- $n = 1$ のときの公式より $|h|$ が十分小さければ

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz, \quad f'(z_0+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{\{z-(z_0+h)\}^2} dz$$

  が成り立つ.

- これより

$$\begin{aligned}\frac{f'(z_0+h) - f'(z_0)}{h} &= \frac{1}{2\pi i h} \int_C \left[\frac{f(z)}{\{z-(z_0+h)\}^2} - \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} \right] dz \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \int_C f(z) \frac{h(2z-2z_0-h)}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \frac{2z-2z_0-h}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^2} dz\end{aligned}$$

- 次のことを示す：

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{2z-2z_0-h}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^2}dz=\frac{2!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz \tag{2.3}$$

このことを示せば $h\to 0$ のとき $\lim_{h\to 0}\frac{f'(z_0+h)-f'(z_0)}{h}$ の極限が存在する，つまり f' が z_0 で微分可能ということになり，それが $f''(z_0)$ となる．

- 差をとると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\left[\frac{2z-2z_0-h}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^2}-\frac{2}{(z-z_0)^3}\right]dz \tag{2.4}$$

$[\cdots]$ 内を通分して整理すると

$$\frac{3(z-z_0)h-2h^2}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^3}$$

となるので，考えている差は

$$\frac{h}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{3(z-z_0)-2h}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^3}dz$$

- ここで $n=1$ の場合の証明のときと同様に δ をとり $|h|<\delta/2$ とすれば

$$|z-z_0|\geq\delta,\ \ |z-(z_0+h)|\geq\delta/2\ \text{ on }\ C$$

が成り立つ．また，C は有界な曲線より，ある $K>0$ が存在して次が成り立つ

$$|z-z_0|\leq K\ \text{ on }\ C$$

- よって $M=\max_{z\in C}|f(z)|$ とすれば

$$\begin{aligned}\left|f(z)\frac{3(z-z_0)-2h}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^3}\right| &\leq |f(z)|\frac{3|z-z_0|+2|h|}{|z-(z_0+h)|^2|z-z_0|^3}\\ &\leq M\frac{3K+2\frac{\delta}{2}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2\delta^3}=\frac{4M(3K+\delta)}{\delta^5}\end{aligned}$$

- よって，複素積分の評価公式 (1.2) より L を C の長さとすれば

$$\left|\int_C f(z)\frac{3(z-z_0)-2h}{\{z-(z_0+h)\}^2(z-z_0)^3}dz\right|\leq\frac{4M(3K+\delta)}{\delta^5}L$$

以上より考えている差 (2.4) は $h\to 0$ のとき 0 に収束し，(2.3) が示され

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$$

が証明された．

$\square$

$\boxed{\text{注}}$ 一般の n については帰納法を用いるが計算が相当煩雑である．

例題 1

Cauchy の積分公式を用いて，積分

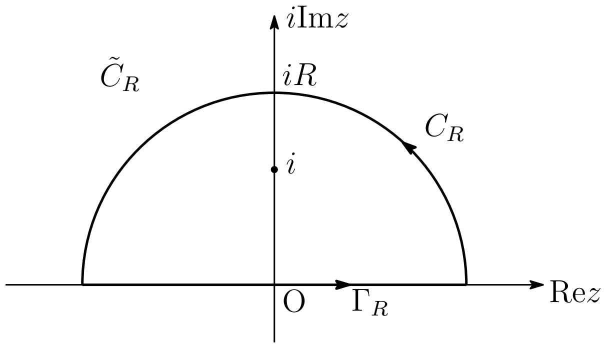
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1} dx \quad (a > 0 : \text{定数})$$

の値を求めよ．

$\boxed{\text{指針}}$ $e^{iat} = \cos at + i \sin at$ であることを用い，$\dfrac{e^{iaz}}{z^2+1}$ の複素積分を用いる．

$\boxed{\text{解}}$

- $R > 0$ に対して，実軸上の $-R$ と R を結ぶ線分 Γ_R と，原点中心，半径 R の円の上半平面にある部分 C_R を結んでできる曲線 $\tilde{C}_R$ を考える：$\tilde{C}_R = \Gamma_R + C_R$



- 次に関数

$$\frac{e^{iaz}}{z^2+1} = \frac{e^{iaz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{f(z)}{z-i} \quad \left(f(z) = \frac{e^{iaz}}{z+i} \text{ とおいた} \right)$$

を考える．

- $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{z+i}$ は $z = -i$ を除いて（$\mathbb{C} \backslash \{-i\}$ で）正則である．よって，任意の $R > 0$ に対して $f(z)$ は $\tilde{C}_R$ およびその内部で正則である．

- また，任意の $R > 1$ に対して $z = i$ は $\tilde{C}_R$ の内部の点である．

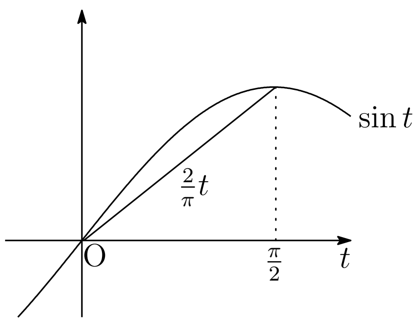
- よって Cauchy の積分公式より

$$\int_{\tilde{C}_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1} dz = \int_{\tilde{C}_R} \frac{f(z)}{z-i} dz = 2\pi i f(i) = \pi e^{-a} \tag{2.5}$$

- 一方

$$\int_{\tilde{C}_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1} dz \tag{2.6}$$

- Γ_R は $z=t(-R\leq t\leq R)$ とパラメータ表示されるので
$$\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{iat}}{t^2+1}dt=\int_{-R}^{R}\frac{e^{iax}}{x^2+1}dx$$
- C_R は $z=Re^{it}(0\leq t\leq\pi)$ とパラメータ表示される．このとき
$$\begin{aligned}&e^{iaz}=e^{iaRe^{it}}=e^{iaR(\cos t+i\sin t)}=e^{-aR\sin t}e^{iaR\cos t}\\&|e^{-aR\sin t}e^{iaR\cos t}|=e^{-aR\sin t}\\&z^2+1=R^2e^{2it}+1\\&|R^2e^{2it}+1|=|R^2e^{2it}-(-1)|\geq|R^2e^{2it}|-|-1|=R^2-1\\&\frac{dz}{dt}=iRe^{it}\end{aligned}$$
より
$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz\right|&=\left|\int_0^{\pi}\frac{e^{-aR\sin t}e^{iaR\cos t}}{R^2e^{2it}+1}iRe^{it}dt\right|\\&\leq\int_0^{\pi}\frac{|e^{-aR\sin t}e^{iaR\cos t}|}{|R^2e^{2it}+1|}|iRe^{it}|dt\\&\leq\int_0^{\pi}\frac{e^{-aR\sin t}}{R^2-1}Rdt=\frac{R}{R^2-1}\int_0^{\pi}e^{-aR\sin t}dt\end{aligned}$$
- $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-aR\sin t}dt$ について考える．
$$\int_0^{\pi}e^{-aR\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-aR\sin t}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-aR\sin t}dt$$
第２項について $s=\pi-t$ とおくとき $\begin{array}{c|c}t&\frac{\pi}{2}\to\pi\\\hline s&\frac{\pi}{2}\to 0\end{array}$, $ds=-dt$ より
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-aR\sin t}dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}e^{-aR\sin(\pi-s)}(-ds)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-aR\sin t}dt$$
よって $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-aR\sin t}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-aR\sin t}dt$
- 次に $0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}$ で $\dfrac{2}{\pi}t\leq\sin t$ だから



$$e^{-aR\sin t} \leq e^{-aR\frac{2}{\pi}t}$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t}dt &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2}{\pi}t}dt \\ &= \left[-\frac{\pi}{2aR}e^{-aR\frac{2}{\pi}t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2aR}(1-e^{-aR}) \leq \frac{\pi}{2aR}\end{aligned}$$

- 以上まとめると

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz\right| = \left|\int_0^{\pi}\frac{e^{iaRe^{it}}}{R^2e^{2it}+1}iRe^{it}dt\right| &\leq \int_0^R \frac{|e^{iaRe^{it}}|}{|R^2e^{2it}+1|}|iRe^{it}|dt \\ &\leq \frac{R}{R^2-1}\int_0^{\pi} e^{-aR\sin t}dt \\ &\leq \frac{2R}{R^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t}dt \\ &\leq \frac{2R}{R^2-1}\cdot\frac{\pi}{2aR} = \frac{\pi}{a(R^2-1)} \to 0 \quad (\text{as } R\to\infty)\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz = 0.$

- 一方,

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{iax}}{x^2+1}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax + i\sin ax}{x^2+1}dx\end{aligned}$$

- (2.5), (2.6) より

$$\pi e^{-a} = \int_{\Gamma_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz + \int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz$$

$R\to\infty$ として

$$\pi e^{-a} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax + i\sin ax}{x^2+1}dx$$

両辺の実部をとり

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}dx = \pi e^{-a}$$

3　Cauchyの評価式・Liouvilleの定理とその応用

3.1　前回の復習

Cauchy の積分公式の微分形

$f(z)$ は領域 $D(\subset \mathbb{C})$ で正則とする．$f(z)$ は D で何回も微分可能である．さらに $z_0 \in D$ とし，z_0 を内部に含む（区分的に滑らかな）D 内の単純閉曲線 C に対して，C の内部が D のみの点からなるとき

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

3.2　Cauchyの評価式

命題 3.1(Cauchy の評価式)

$f(z)$ は領域 $D(\subset \mathbb{C})$ で正則であるとする．ある $r > 0$ に対し

$$\overline{U_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \subset D$$

であり $C_r : |z - z_0| = r$ 上で $|f(z)| \leq M$ （M: 定数）が成り立つとき

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．

証明 Cauchy の積分公式（微分形）から

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \tag{3.1}$$

ここで C_r 上 $|z - z_0| = r$ であり，仮定から $|f(z)| \leq M$ on C_r であるから

$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right| = \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} \leq \frac{M}{r^{n+1}} \quad \text{on} \quad C_r$$

よって複素積分の評価式 (1.2) より

$$\left|\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = 2\pi\frac{M}{r^n}$$

よって (3.1) より

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi\frac{M}{r^n} = \frac{n!M}{r^n} \end{aligned}$$

□

3.3 Liouville の定理とその応用

Cauchy の評価式を用いると，次の **Liouville の定理**が導かれる．

定理 3.2（Liouville の定理）

$f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則でかつ有界であるとする．このとき $f(z)$ は定数関数である．

証明

- $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で有界であるから

$$|f(z)| \leq M \quad \text{on} \quad \mathbb{C}$$

  となる $M > 0$ が存在する．

- $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則であり，任意に $z_0 \in \mathbb{C}$ をとると，任意の $r > 0$ に対し $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathbb{C}$ であるので命題 3.1（Cauchy の評価式）より

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r} \tag{3.2}$$

  が成り立つ．

- $r > 0$ は任意であるから (3.2) で $r \to \infty$ とすることにより

$$f'(z_0) = 0$$

  が成り立つ．$z_0 \in \mathbb{C}$ は任意であるから

$$f'(z) = 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{C}$$

  が成り立つ．よって $f(z)$ は定数関数である．□

注 $\sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ は何回でも微分可能で，$|\sin x| \leq 1$ (on $\mathbb{R}$) なので $\mathbb{R}$ 上有界である．$z \in \mathbb{C}$ に対し $\sin z$ は

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

で定義され，$\mathbb{C}$ 上正則である．もし，$\sin z$ が $\mathbb{C}$ 上有界であると仮定すると Liouville の定理より $\sin z$ は定数関数となってしまう．しかし，$\sin z$ は明らかに定数関数ではないので，有界でない関数である．実際，$z = x + iy$ とおくと

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

である．$x = \frac{\pi}{2}$ とおくと $z = \frac{\pi}{2} + iy$ であり

$$\sin z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + iy\right) = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

よって

$$|\sin z| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + iy\right)\right| = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \to \infty \quad (\text{as} \quad y \to \infty)$$

Liouville の定理から次の**代数学の基本定理**が導かれる．

定理 3.3（代数学の基本定理）

複素係数の n 次代数方程式 $(n \geq 1)$

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n = 0$$

は $\mathbb{C}$ のおいて少なくとも 1 つ解をもつ．

証明

- $P(z) := z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n$ とおき，結論を否定する，すなわち

$$P(z) \neq 0 \quad \text{for} \quad {}^{\forall} z \in \mathbb{C} \tag{3.3}$$

  とする．

- $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ とおくと (3.3) より，$f(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則である．次に $f(z)$ が $\mathbb{C}$ で有界であることを示そう．

- $P(z) = z^n \left(1 + \dfrac{c_1}{z} + \cdots + \dfrac{c_n}{z^n}\right)$ で

$$\left|1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n}\right| \geq 1 - \frac{|c_1|}{|z|} - \frac{|c_2|}{|z|^2} - \cdots - \frac{|c_n|}{|z|^n}$$

  より

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z|^n \left|1 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_n}{z^n}\right| \\ &\geq |z|^n \left(1 - \frac{|c_1|}{|z|} - \frac{|c_2|}{|z|^2} - \cdots - \frac{|c_n|}{|z|^n}\right) \\ &\to \infty \quad (\text{as} \quad |z| \to \infty) \end{aligned}$$

  であるから

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$$

  である．

- よって，$a > 0$ を十分大きくとれば

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{for} \quad |z| \geq a$$

  が成り立つ．

- また，$f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則であるから連続である．よって有界閉集合 $\overline{B_a(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq a\}$ 上で $|f(z)|$ は最大値をとる，つまり，

$$|f(z)| \leq M_1 \quad \text{for} \quad |z| \leq a$$

となる定数 $M_1 > 0$ が存在する．

- よって $M = 1 + M_1$ とおけば

$$|f(z)| \leq M \quad \text{on} \quad \mathbb{C}$$

が成り立つ．つまり $f(z)$ は $\mathbb{C}$ 上有界である．

- Liouvilleの定理より $f(z)$ したがって $P(z)$ は定数関数となるが，これは $|P(z)| \to \infty$ (as $|z| \to \infty$) に矛盾である．

- 以上より $P(z)$ は少なくとも 1 つの $z \in \mathbb{C}$ で $P(z) = 0$ が成り立つ．$\square$

4　正則関数についてのまとめ

4.1　単連結領域

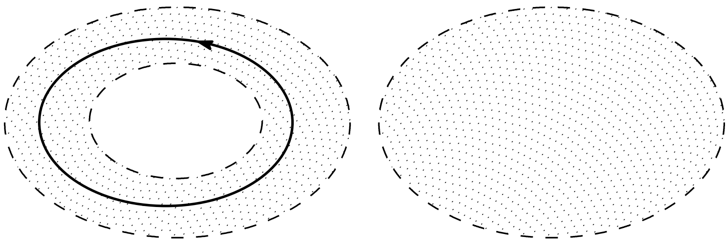
Cauchy の積分定理における仮定

「C は D 内の単純閉曲線で，C の内部は D の点のみからなる」

について，下線部が自動的に満たされる領域である単連結領域を定義しよう．

定義

領域 D 内の任意の単純閉曲線について，その内部が D のみの点からなるとき，D は**単連結領域**であるという．



単連結でない　　　　単連結である

Cauchy の積分定理は次のように述べられる．

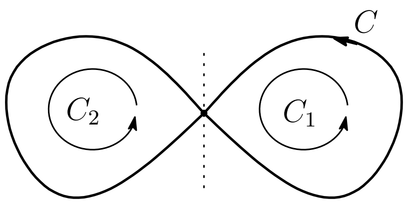
命題 4.1

D を単連結領域，$f(z)$ は D で正則な関数とする．C を D 内の（区分的に滑らかな）単純閉曲線とすると

$$\int_C f(z)dz = 0$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{注}}$ この命題は C が単に閉曲線の場合でも成り立つ．



実際，C が有限個の自己交差をもつ場合，例えば図のような場合，交点で２つの単純閉曲線 C_1, C_2 に分ければ $C = C_1 + (-C_2)$ であるから

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0 + 0 = 0$$

となるからである．また，C が無限個の自己交差をもつ場合でも成り立つことが知られている．

4.2　不定積分と原始関数・Moreraの定理

- D を単連結領域とする．

- $f(z)$ が D で連続で原始関数 $F(z)$ をもつとする：

$$F'(z) = f(z) \quad \text{in } D$$

  このとき，区分的に滑らかな曲線 C に沿う複素積分は始点と終点だけで決まる，つまり，C が z_0 と z_1 （$z_0, z_1 \in D$）を結ぶ D 内の任意の曲線とするとき

$$\int_C f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

  が成り立つのであった（1節参照）．

- Cauchy の積分定理（命題 4.1 とそれに続く注）を用いると単連結領域上で正則な関数についても同じことが成り立つことを証明することができる．

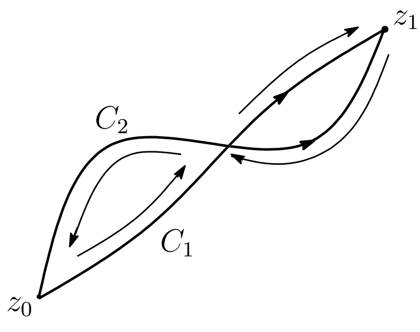
命題 4.2

D を単連結領域，$f(z)$ は D で正則な関数とする．このとき，C_1, C_2 をともに z_0, z_1 を結ぶ D 内の任意の曲線とすると

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

が成り立つ．

証明



- $C = C_1 + (-C_2)$ とおくと C は D 内の閉曲線である．

- 従って命題 4.1 とそのあとに続く **注** により

$$\int_C f(z)dz = 0$$

  が成り立つ．

- よって

$$\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0$$

つまり

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

が成り立つ.

$\square$

不定積分

- D を単連結領域，関数 $f(z)$ は D で正則とする.
- $z_0 \in D$ を固定し，任意の $z \in D$ に対して z_0 と z を結ぶ D 内の任意の（区分的に滑らかな）曲線 C_z に対して，命題 4.2 より

$$\int_{C_z} f(\zeta)d\zeta$$

は z のみから定まる，つまり z の関数である（ここで終点に z を用いたので積分変数を ζ とした）. この関数を $f(z)$ の**不定積分**といい,

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

とかかれることもある.

定理 4.3

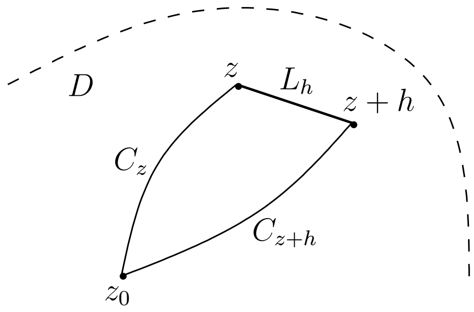
D を単連結領域，$f(z)$ は D で正則な関数とする. このとき $f(z)$ の不定積分を $F(z)$ とすると

$$F'(z) = f(z) \quad \text{in} \quad D$$

が成り立つ，つまり，$F(z)$ は $f(z)$ の原始関数である.

証明

- $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$ を証明すればよい（$\varepsilon - \delta$ 式に証明する）.
- $z_0 \in D$ を固定し z_0 と z を結ぶ任意の曲線を C_z とする.
- $\displaystyle F(z) = \int_{C_z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ であるから $\displaystyle F(z+h) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta$ である.



- z と $z+h$ を結ぶ線分を L_h とすれば

$$\int_{C_z} f(\zeta)d\zeta + \int_{L_h} f(\zeta)d\zeta = \int_{C_{z+h}} f(\zeta)d\zeta$$

より

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta + \int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta$$

であるから

$$F(z+h) - F(z) = \int_{L_h} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta, \quad \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta$$

- 次に，関数 1 は原始関数 z をもつので

$$\int_{z}^{z+h} 1d\zeta = (z+h) - z = h$$

したがって

$$f(z) = f(z)\cdot\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} 1d\zeta = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)d\zeta$$

である．

- 以上より

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} \{f(\zeta) - f(z)\}d\zeta \tag{4.1}$$

が成り立つ．ここで，$\displaystyle\int_{z}^{z+h} d\zeta$ は z と $z+h$ を結ぶ任意の曲線に沿う積分で良いが，L_h に沿う積分とする（L_h の長さは $|h|$）

- f は z で連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$\zeta \text{ が } |\zeta - z| < \delta \ \Rightarrow\ |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

が成り立つ．

- よって $|h| < \delta$ ならば

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{for} \quad \zeta \in L_h$$

が成り立つ．

- したがって，複素積分の評価式 (1.2) より

$$\left| \int_z^{z+h} \{f(\zeta) - f(z)\} d\zeta \right| = \left| \int_{L_h} \{f(\zeta) - f(z)\} d\zeta \right| \leq \varepsilon |h|$$

が成り立つ．

- 以上より $0 < |h| < \delta$ ならば (4.1) より

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \{f(\zeta) - f(z)\} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つが，これは

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

を意味する．□

$$\left({}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}\delta > 0 \ \text{ s.t. } \ |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \varepsilon \right)$$

Morera の定理（Cauchy の積分定理の逆）

定理 4.3 の証明と同様にして，次のことを証明することができる．

定理 4.4（Morera の定理）

D を単連結領域，$f(z)$ は D で連続な関数とする．D 内の任意の閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z) dz = 0$$

であれば $f(z)$ は D で正則である．

証明

- 仮定から，命題 4.2 の証明と同様にして z_0 と z_1 （$z_0,\, z_1 \in D$）を結ぶ任意の曲線 C_1, C_2 に対して

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

が成り立つことを証明できる．

- このことから $z_0 \in D$ を固定し，z_0 と $z \in D$ を結ぶ D 内の任意の曲線 C_z に対して積分

$$\int_{C_z} f(\zeta)d\zeta$$

を考えるとこの値は z のみで定まる．これを $F(z)$ とおくと定理 4.3 の証明と同様にして

$$F'(z) = f(z)$$

が成り立つことが証明できる．これは任意の $z \in D$ に対して成り立つので F は D で正則であることになる．正則な関数は何回でも微分可能（定理 2.3 とそのあとの **注**）であるから $F'(z)$ つまり $f(z)$ は D で正則である．□

以上まとめると次のようになる：D を単連結領域とすると

- f が D で正則 $\Rightarrow \displaystyle\int_C f(z)dz = 0$ ($^\forall C$: D の閉曲線)（命題 4.1）
- f が D で正則 $\Leftarrow \displaystyle\int_C f(z)dz = 0$ ($^\forall C$: D の閉曲線)（定理 4.4(Morera の定理)）
- f が D で原始関数をもつ $\Rightarrow \displaystyle\int_C f(z)dz = 0$ ($^\forall C$: D の閉曲線)（直接計算）
- f が D で原始関数をもつ $\Leftarrow \displaystyle\int_C f(z)dz = 0$ ($^\forall C$: D の閉曲線)（定理 4.4 の証明（$\leftarrow$ 定理 4.3 の証明と同じ））

したがって，**単連結領域 D においては「正則であること」,「D の任意の閉曲線に沿う複素積分の値が 0 であること」,「D で正則な関数 F があって $F'(z) = f(z)$ が成り立つ，つまり，原始関数をもつこと」は全て同値**である．

5　数列・級数の収束・発散

5.1　数列

- 複素数からなる数列 $\{z_n\}$ に対して，ある $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - \alpha| = 0$$

が成り立つとき，数列 $\{z_n\}$ は α に**収束する**といい

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha, \quad z_n \to \alpha \ \ (\text{as} \ \ n \to \infty)$$

と表す．α を数列 $\{z_n\}$ の**極限値**という．

注 複素数列 $\{z_n\}$ の収束を実数列 $\{|z_n - \alpha|\}$ が 0 に収束することで定義している．

- **$\varepsilon - n_0$ 式定義**

数列 $\{z_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束するとは

「任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ」ことである．

- いかなる $\alpha \in \mathbb{C}$ にも収束しない数列は**発散する**という．

- $z = x + iy$ （$x = \mathrm{Re}z,\, y = \mathrm{Im}z$）に対して

$$|x|, |y| \leq |z| \leq |x| + |y| \tag{5.1}$$

が成り立つから，数列 $\{z_n\}$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$|\mathrm{Re}z_n - \mathrm{Re}\alpha|,\ |\mathrm{Im}z_n - \mathrm{Im}\alpha| \leq |z_n - \alpha| \leq |\mathrm{Re}z_n - \mathrm{Re}\alpha| + \ |\mathrm{Im}z_n - \mathrm{Im}\alpha|$$

がわかる．したがって次のことが示される．

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}z_n = \mathrm{Re}\alpha \ \text{かつ} \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}z_n = \mathrm{Im}\alpha \tag{5.2}$$

命題 5.1

数列 $\{z_n\}$ は収束するならば有界である，つまりある $M > 0$ が存在して $|z_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つ．

証明

- 数列 $\{z_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束するとする．数列の収束の $\varepsilon - n_0$ 式定義より，$\varepsilon = 1$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_n - \alpha| < 1$$

が成り立つ．

- $|z_n - \alpha| \geq |z_n| - |\alpha|$ より $n \geq n_0$ ならば $|z_n| \leq |\alpha| + 1$ が成り立つ．
- よって $M = \max\{|z_1|, \cdots, |z_{n_0-1}|, |\alpha| + 1\}$ とすれば $|z_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つ．□

命題 5.2

数列 $\{z_n\}$, $\{w_n\}$ が $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} w_n = \beta$$

を満たすならば

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \alpha + \beta$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \alpha\beta$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$

証明はこの節の最後の「補足」で述べる．

例題 1

任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して次のことを証明せよ：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$$

解

- $\displaystyle\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!}$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^n}{n!} = 0$ を示せばよい．
- 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $2|z| \leq n$ $(n \geq N+1)$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在する．
- このとき $n \geq N+1$ ならば

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{|z|^n}{n!} &= \frac{|z|}{n} \cdot \frac{|z|}{n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{|z|}{N+1} \left(\frac{|z|^N}{N!}\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \left(\frac{|z|^N}{N!}\right) \to 0 \quad (\text{as} \quad n \to \infty) \ \square \end{aligned}$$

Cauchy 列

数列の収束を定義から示すためには $|z_n - \alpha| \to 0$ (as $n \to \infty$) となる α をみつけなければならないが，次の Cauchy 列の概念を用いればその必要がなくなる．

定義

数列 $\{z_n\}$ が **Cauchy 列**であるとは

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m,\ n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_m - z_n| < \varepsilon$$

が成り立つ」ことである．

注 数列 $\{z_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束するならば Cauchy 列である．実際，収束の定義から任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_m - z_n| &= |(z_m - \alpha) + (\alpha - z_n)| \\ &\leq |z_m - \alpha| + |z_n - \alpha| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\{z_n\}$ は Cauchy 列である．

実数の連続性の公理から，実数全体 $\mathbb{R}$ は次の**完備性**という性質をもっている．

実数列 $\{x_n\}$ について

$$\{x_n\} \text{ がある } \alpha \in \mathbb{R} \text{ に収束する} \ \Leftrightarrow \ \{x_n\} \text{ は Cauchy 列}$$

このことを用いると $\mathbb{C}$ も完備性をもつことがわかる．

命題 5.3

複素数列 $\{z_n\}$ について

$$\{z_n\} \text{ がある } \alpha \in \mathbb{C} \text{ に収束する} \ \Leftrightarrow \ \{z_n\} \text{ は Cauchy 列}$$

証明 $(\Rightarrow)$ はすでに示したので $(\Leftarrow)$ を示す．

- $z_n = x_n + iy_n$ ($x_n = \mathrm{Re} z_n$, $y_n = \mathrm{Im} z_n$) とし，$\{z_n\}$ を Cauchy 列とする．

- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_m - z_n| < \varepsilon$$

- (5.1) より $m, n \geq n_0$ ならば

$$|x_m - x_n|,\ |y_m - y_n| \leq |z_m - z_n| < \varepsilon$$

- よって，実数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ は Cauchy 列であるのでそれぞれある実数 A, B に収束する．
- (5.2) より $\{z_n\}$ も $A + Bi$ に収束する．□

5.2 級数

- 複素数列 $\{z_n\}$ に対し，各項の（形式的な）無限和

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

を**（無限）級数**という．

- 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

をこの級数の**第 n 部分和**という．

定義

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ の第 n 部分和 S_n からなる数列 $\{S_n\}$ がある $S \in \mathbb{C}$ に収束するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は**収束する**といい

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

と表す．また S をこの級数の**和**という．

- 収束しない級数は**発散する**という．

命題 5.4

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ が成り立つ．

証明

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$, この級数の第 n 部分和を S_n とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$ が成り立つ.
- 次に $z_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$ より $n \to \infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 \qquad \square$$

注

- 対偶をとれば

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \text{ でなければ，級数 } \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ は発散する}$$

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ であっても級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は収束するとは限らない（例：$z_n = 1/n$）.

級数の収束はその第 n 部分和からなる数列の収束により定義されるので Cauchy 列であることを級数の収束の判定に用いることができる.

命題 5.5

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が第 n 部分和を S_n とする．この級数が収束するための必要十分条件は

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n > m \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} z_k\right| < \varepsilon$$

が成り立つこと」である.

定義

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ について $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は**絶対収束**するという.

命題 5.6

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束するならば収束する

証明

- 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ は収束するから命題 5.5 より
任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$n > m \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=m+1}^{n}|z_k| < \varepsilon$$
が成り立つ.

- よって $n > m \geq n_0$ ならば
$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n}|z_k| < \varepsilon$$
が成り立つ.

- よって再び命題 5.5 より級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は収束する．□

命題 5.6 の証明と全く同様にして次のことを証明することができる.

命題 5.7

数列 $\{z_n\}, \{p_n\}$ は $|z_n| \leq p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たし，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ は収束するとする.
このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束する.

例題２

$|z| < 1$ なる任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は絶対収束し，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の和は $\dfrac{1}{1-z}$ である.

解

- $|z^n| = |z|^n$ であり $|z| < 1$ であるから $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n$ は収束する．よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は絶対収束する.

- 次に級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の第 n 部分和を S_n とすると
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

であり

$$\left|S_n - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{-z^{n+1}}{1-z}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \to 0 \quad (\text{as } n \to \infty)(\text{なぜなら } |z|<1)$$

よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の和は $\dfrac{1}{1-z}$ である．□

絶対収束する級数の重要な性質として次のものがある．

定理 5.8

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が絶対収束するならば，項を並べ替えてできる級数も絶対収束し，和は等しい．

証明は補足で述べる．

定理 5.9（Cauchy-Hadamard の判定法，root-test）

数列 $\{z_n\}$ について

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = r < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束する．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = r > 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は発散する．

証明

(1) $r < \rho < 1$ なる ρ をとる．$\sqrt[n]{|z_n|} \to r < \rho$ (as $n \to \infty$) より，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{|z_n|} < \rho$$

つまり

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |z_n| < \rho^n$$

が成り立つ．$0 < \rho < 1$ より $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \rho^n$ は収束する．よって命題 5.7 より $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} |z_n|$，したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ は収束する．

(2) $\sqrt[n]{|z_n|} \to r > 1$ (as $n \to \infty$) より，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{|z_n|} > 1$$

つまり

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |z_n| > 1$$

が成り立つ．これより $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ とはならないので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は発散する．

□

定理 5.10（d'Alembert の判定法，raito-test）

数列 $\{z_n\}$ について

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = r < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束する．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = r > 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は発散する．

証明

(1) $r < \rho < 1$ なる ρ をとる．$\displaystyle\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \to r < \rho$ (as $n \to \infty$) より，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < \rho$$

つまり

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |z_{n+1}| < \rho|z_n|$$

が成り立つ．よって $n > N$ ならば

$$|z_n| < \rho|z_{n-1}| < \rho^2|z_{n-2}| < \cdots < \rho^{n-N}|z_N|$$

が成り立つ．$0 < \rho < 1$ より $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \rho^{n-N}|z_N|$ は収束する．よって命題 6.7 より $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} |z_n|$，したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ は収束する．

(2) $\displaystyle\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \to r > 1$ (as $n \to \infty$) より，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1$$

つまり

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |z_{n+1}| > |z_n| (\geq |z_N|)$$

が成り立つ．これより $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ とはならないので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は発散する．

□

5.3 補足１：命題 5.2 の証明

(1) $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} w_n = \beta$ であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば

$$|z_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |w_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．よって $n \geq n_0$ ならば

$$\begin{aligned}|(z_n + w_n) - (\alpha + \beta)| &\leq |(z_n - \alpha) + (w_n - \beta)| \\ &\leq |z_n - \alpha| + |w_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \alpha + \beta$ が証明された．

(2)
- $\{w_n\}$ は収束するので，命題 5.1 より，ある $M > 0$ が存在して $|w_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つ．
- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} w_n = \beta$ であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば

$$|z_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2M}, \ |w_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}$$

  が成り立つ．
- よって $n \geq n_0$ ならば

$$\begin{aligned}|z_n w_n - \alpha\beta| &\leq |(z_n - \alpha)w_n + \alpha(w_n - \beta)| \\ &\leq |z_n - \alpha||w_n| + |\alpha||w_n - \beta| \\ &\leq |z_n - \alpha|M + |\alpha||w_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M}M + \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

  が成り立つ．したがって $\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \alpha\beta$ が証明された．

(3)
- 次のことを示せばよい：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{w_n} = \frac{1}{\beta}$$

- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\lim_{n\to\infty} w_n = \beta$ であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば

$$|w_n - \beta| < \frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon$$

  が成り立つ（$\beta \neq 0$ に注意）．

- 同様にして，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_1$ ならば

$$|w_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}\varepsilon$$

が成り立つ．これより $n \geq n_1$ ならば

$$\begin{aligned}|w_n| &= |\beta + (w_n - \beta)| = |\beta - \{-(w_n - \beta)\}| \\ &\geq |\beta| - |w_n - \beta| > |\beta| - \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2}\end{aligned}$$

- よって $n \geq N := \max\{n_0, n_1\}$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{\beta}\right| &= \frac{|\beta - w_n|}{|w_n||\beta|} = \left|\frac{w_n - \beta}{w_n\beta}\right| \\ &\leq \frac{|w_n - \beta|}{|w_n\beta|} < \frac{1}{\frac{|\beta|}{2}|\beta|} \cdot \frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{w_n} = \frac{1}{\beta}$ が証明された．

5.4 補足２：定理 5.8 の証明

証明の前に次の２点を思い出そう．

実数列 $\{a_n\}$ について

- ある $M > 0$ が存在して $a_n \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つ（上に**有界**）．
- $a_n \leq a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$（**単調増加**）

が成り立つならば、数列 $\{a_n\}$ は収束する．

数列 $\{a_n\}$ が $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たすとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を**正項級数**という．

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ についてその第 n 部分和を $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とすると $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$ であるから，数列 $\{S_n\}$ は単調増加である．よって $\{S_n\}$ が（上に）有界であれば $\{S_n\}$ したがって正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

定理 5.8 の証明

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ の項を並べ替えてできる級数とする．具体的には $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を全単射（1:1 対応）として $w_n = z_{\varphi(n)}$ と表されるとする．

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ が絶対収束することを証明する．

  各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$N(n) = \max\{\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(n)\}$$

  とする，つまり $w_1, w_2, \cdots, w_n$ はそれぞれ元々は $z_1, z_2, \cdots$ のどれかであるが，そのときの項の番号で一番大きいものを $N(n)$ とおいたのである．このとき

$$\sum_{k=1}^{n} |w_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_{\varphi(k)}| \leq \sum_{k=1}^{N(n)} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty$$

  よって正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ の第 n 部分和は上に有界である．したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ は収束する，つまり $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ は絶対収束する．

- 次に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ の和が一致することを証明する．

  $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S, \sum_{n=1}^{\infty} w_n = T$ とおく．

- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．

  $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ よりある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |z_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k| - \sum_{k=1}^{n_0} |z_k| < \frac{\varepsilon}{3}$$

  このとき

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n_0} z_k \right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |z_k| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.3}$$

- 次に，ある $m_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$m \geq m_0$ ならば

$$\{z_1, \ \cdots, \ z_{n_0}\} \subset \{w_1, \ \cdots, w_m\}$$

となる．これより

$$\{z_{n_0+1},\ z_{n_0+2},\ \cdots,\ \} \supset \{w_{m+1},\ w_{m+2},\ \cdots\}$$

であるから（$\{z_1, z_2, \cdots\} = \{w_1, w_2, \cdots\}$ に注意）

$$\left| T - \sum_{k=1}^{m} w_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |w_k| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |z_k| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.4}$$

- また，$\{w_1, \cdots, w_m\}$ には $\{z_1, \cdots, z_{n_0}\}$ がすべて含まれるので

$$\left| \sum_{k=1}^{m} w_k - \sum_{k=1}^{n_0} z_k \right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |z_k| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.5}$$

- 以上 (5.3),(5.4), (5.5) より

$$\begin{aligned} |T - S| &\leq \left| T - \sum_{k=1}^{m} w_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{m} w_k - \sum_{k=1}^{n_0} z_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{n_0} z_k - S \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

- $0 \leq |T - S|$ であり，この値は ε に無関係なので $|T - S| = 0$ つまり $T = S$ である．□

6　関数列・関数項級数の収束

6.1　関数列の各点収束・一様収束

- $E \subset \mathbb{C}$ で定義された関数の列 $\{f_n(z)\}$ を**関数列**という．任意の $z_0 \in E$ に対して $\{f_n(z_0)\}$ は（複素）数列であるから，その収束・発散を考えることができる．

- 任意の $z \in E$ に対して，数列 $\{f_n(z)\}$ が収束するとするとその極限値は z に対してただ1つ定まるので E 上で定義された関数となる．それを $f(z)$ と書くとき，関数列 $\{f_n(z)\}$ は関数 $f(z)$ に**各点収束**するといい，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \quad E \text{ 上各点収束}$$
$$f_n(z) \to f(z) \quad (n \to \infty) \quad E \text{ 上各点収束}$$

などと書く．

例 実数値関数で２つの例を述べる．

(1) $f_n(x) = x^n$ $(x \in [0,1])$ $(n = 1, 2, \cdots)$ により関数列 $\{f_n(x)\}$ を定義する．$\{f_n(x)\}$ は

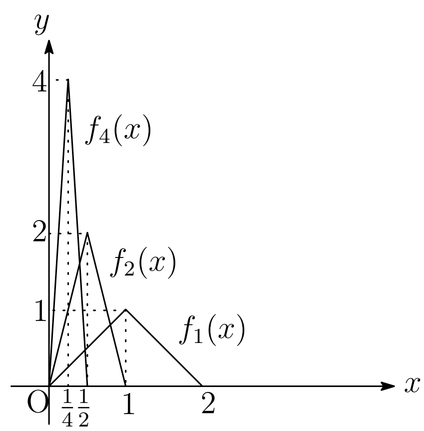
$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 1) \\ 0 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

に $[0,1]$ 上各点収束することがわかる．

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x)$ は $[0,1]$ 上連続だが，$f(x)$ は $x = 1$ で連続でない．このように各点収束は連続性を保存しないことがわかる．

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対して $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \left(0 \leq x < \dfrac{1}{n}\right) \\ 2n - n^2 x & \left(\dfrac{1}{n} \leq x < \dfrac{2}{n}\right) \\ 0 & \left(x \geq \dfrac{2}{n}\right) \end{cases}$$



とすると，$\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ 上（特に $[0,1]$ 上）$f(x)=0$ に各点収束するが，$n \geq 2$ のとき

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{2}{n} \times n \times \frac{1}{2} = 1$$

一方で $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$ である．

したがって各点収束では $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$ は一般には成り立たない．

定義

$E(\subset \mathbb{C})$ で定義された関数の列（今後，E 上の関数列という）$\{f_n(z)\}$ が関数 $f(z)$ に <u>E 上**一様収束**</u>するとは

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0,\ z \in E \quad \Rightarrow \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon」$$

が成り立つことである．

注

- 各点収束を $\varepsilon - n_0$ 式に書くと

  「任意の $z \in E$，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

  $$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad 」$$

  となる．$z \in E$ を先に任意に選んでいるので n_0 は ε だけでなく z にも依る．

- 一様収束は次のように言ってもいい

  $$\lim_{n\to\infty} \sup_{z \in E} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

定理 6.1

E 上の関数列 $\{f_n(z)\}$ がある関数 $f(z)$ に E 上に一様収束するための必要十分条件は，次の **Cauchy 条件**を満たすことである：

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0,\ z \in E \quad \Rightarrow \quad |f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon \quad 」$$

証明

- $\{f_n(z)\}$ が $f(z)$ に E 上一様収束するとする．定義より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$n \geq n_0,\ z \in E \quad \Rightarrow \quad |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
が成り立つ．

- よって $m, n \geq n_0, z \in E$ ならば
$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq |f_m(z) - f(z)| + |f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
よって Cauchy の条件を満たす．

- 逆に $\{f_n(z)\}$ が Cauchy の条件を満たすとすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$m, n \geq n_0,\ z \in E \quad \Rightarrow \quad |f_m(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.1}$$
が成り立つ．

- これより，各 $z \in E$ に対して数列 $\{f_n(z)\}$ は Cauchy 列である．よって，各 $z \in E$ に対して命題 5.3 より $\{f_n(z)\}$ は収束するので、その極限値を $f(z)$ とおく．

- (6.1) において $m \to \infty$ とすると $|f(z) - f_n(z)| = |f_n(z) - f(z)|$ だから
$$n \geq n_0,\quad z \in E \quad \Rightarrow \quad |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$
が成り立つ．これは $\{f_n(z)\}$ が $f(z)$ に E 上一様収束することを意味する．□

一様収束の性質で次が重要である．

定理 6.2

E 上の連続関数列 $\{f_n(z)\}$ がある関数 $f(z)$ に E 上に一様収束するならば $f(z)$ は E 上で連続な関数である．

証明 証明したいことは次の通りである：

「任意に $z_0 \in E$ をとったとき，$f(z)$ が z_0 で連続であること，つまり，任意に $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して
$$|z - z_0| < \delta,\quad z \in E \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon」$$

- $z_0 \in E$ を任意にとり固定する．次に $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\{f_n(z)\}$ は $f(z)$ に E 上一様収束するから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$z \in E \quad \Rightarrow \quad |f_{n_0}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{6.2}$$
が成り立つ．特に $z = z_0$ でも成り立つ．

- $f_{n_0}(z)$ は $z = z_0$ で連続であるから，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|z - z_0| < \delta, \ \ z \in E \ \ \Rightarrow \ \ |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{6.3}$$

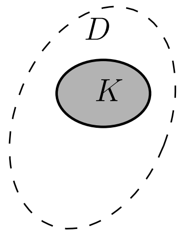
- よって (6.2), (6.3) より $|z - z_0| < \delta$, $z \in E$ ならば

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

  よって $f(z)$ は z_0 で連続である．$z_0 \in E$ は任意なので $f(z)$ は E で連続である．□

定義

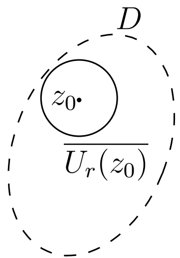
領域 D 上の関数列 $\{f_n(z)\}$ が関数 $f(z)$ に D 上**広義一様収束**するとは，D の任意のコンパクト集合 K（$K \subset D$ なる有界閉集合）に対して $\{f_n(z)\}$ が $f(z)$ に K 上一様収束することである．



命題 6.3

領域 D 上の連続関数列 $\{f_n(z)\}$ が関数 $f(z)$ に D 上広義一様収束するとする．このとき $f(z)$ は D 上連続である．

証明 $z_0 \in D$ を任意にとる．D は開集合だから，ある $r > 0$ があって $\overline{U_r(z_0)} \subset D$ とできる．



$\{f_n(z)\}$ は D 上広義一様収束するので特に $\overline{U_r(z_0)}$ 上一様収束する．定理 6.2 より $f(z)$ は $\overline{U_r(z_0)}$ 上で，特に $z = z_0$ で連続である．□

命題 6.4

領域 D 上の連続関数列 $\{f_n(z)\}$ が $f(z)$ に D 上広義一様収束するとする．このとき D 内の任意の区分的に滑らかな曲線 C に対し

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)dz = \int_C f(z)dz$$

が成り立つ．

証明

- C の長さを L とする．また，C は D のコンパクト集合である（補足 1 参照）ので $\{f_n(z)\}$ は $f(z)$ に C 上一様収束する．
- よって，任意の $\varepsilon > 0$ をとると，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$n \geq n_0,\ z \in C \quad \Rightarrow \quad |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2L}$$
が成り立つ．
- したがって $n \geq n_0$ ならば複素積分の評価式 (1.2) より
$$\left|\int_C f_n(z)dz - \int_C f(z)dz\right| = \left|\int_C \{f_n(z) - f(z)\}dz\right| < \frac{\varepsilon}{2L}L = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$
これは $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)dz = \int_C f(z)dz$ を意味する．□

6.2 一様収束と正則性

正則性は一様収束により保存される．

定理 6.5

領域 D 上の正則関数列 $\{f_n(z)\}$ が $f(z)$ に D 上広義一様収束するとする．このとき，$f(z)$ も D で正則である．

証明 次のことを証明すればよい：任意の $z_0 \in D$ に対し $f(z)$ は $z = z_0$ で微分可能

- $z_0 \in D$ を任意にとる．D は開集合だからある $r > 0$ が存在して $\overline{U_r(z_0)} \subset D$ とできる．
- $\{f_n(z)\}$ は $f(z)$ に D 上広義一様収束するので，特に $\overline{U_r(z_0)}$ 上一様収束する．
- $f_n(z)$ は<u>単連結領域</u> $U_r(z_0)$ で正則だから Cauchy の積分定理により，$U_r(z_0)$ の任意の閉曲線 C に対して
$$\int_C f_n(z)dz = 0$$

よって命題6.4より

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)dz = 0$$

- C は単連結領域 $U_r(z_0)$ の任意の閉曲線であるから，Moreraの定理（定理4.4）より $f(z)$ は $U_r(z_0)$ で正則である．特に $z = z_0$ で微分可能である．$z_0 \in D$ は任意だから $f(z)$ は D で正則でる．□

定理 6.6

領域 D 上の正則関数列 $\{f_n(z)\}$ が $f(z)$ に D 上広義一様収束するならば，任意の $k = 1, 2, \cdots$ に対して $\{f_n^{(k)}(z)\}$ は $f^{(k)}(z)$ に D 上広義一様収束する．

証明は補足2で行う．

6.3 関数項級数

- $E(\subset \mathbb{C})$ とする．E 上の関数列 $\{f_n(z)\}$ に対し，(形式的）無限和

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \tag{6.4}$$

を $\{f_n(z)\}$ を項とする**関数項級数**という．

- 関数項級数 (6.4) に対して

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

を関数項級数 (6.4) の**第 n 部分和**という．

定義

$E(\subset \mathbb{C})$ 上の関数列 $\{f_n(z)\}$ を項とする関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ を考える．この級数の第 n 部分和 $S_n(z)$ とする．

(1) $\{S_n(z)\}$ が E 上である関数 $S(z)$ に各点収束するとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は E 上**各点収束**するといい $S(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ と表す．

(2) $\{S_n(z)\}$ が E 上である関数 $S(z)$ に一様収束するとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は E 上**一様収束**するという．

定義

領域 D 上の関数列 $\{f_n(z)\}$ に対して関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が D に含まれる任意のコンパクト集合上で一様収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は D 上**広義一様収束**するという．

関数列の一様収束のための Cauchy の条件を関数項級数の第 n 部分和に用いることにより次を得る．

命題 6.7

E 上の関数列 $\{f_n(z)\}$ に対して，関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が E 上一様収束するための必要十分条件は
「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n > m \geq n_0,\quad z \in E \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(z)\right| < \varepsilon」$$

が成り立つことである．

関数項級数が一様収束するための十分条件として次の定理がある．

定理 6.8（Weierstrass の M -test）

E 上の関数列 $\{f_n(z)\}$ に対して，$M_n \geq 0$ なるある数列 $\{M_n\}$ に対し

$$|f_n(z)| \leq M_n \quad (z \in E,\ n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つとする．このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束するならば関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が E 上一様に絶対収束する．

証明

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束するので Cauchy の条件（命題 5.5）より，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

  $$n > m \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=m+1}^{n} M_n < \varepsilon$$

  が成り立つ．

- このとき $|f_n(z)| \leq M_n$ $(z \in E, n = 1, 2, \cdots)$ より

$$n > m \geq n_0,\ z \in E \quad \Rightarrow \quad \left(\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(z) \right| \leq \right) \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(z)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon$$

- よって命題6.7より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は E 上一様に絶対収束する．□

注 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ が E 上一様収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は E 上**一様に絶対収束**するという．E 上一様に絶対収束する関数項級数は E 上一様収束することが命題6.7から簡単に証明することができる．

定理 6.9（関数項級数の項別微分・積分）

領域 D 上の正則関数列 $\{f_n(z)\}$ に対し，関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が D 上広義一様収束するとする．

(1) D 内の任意の区分的滑らかな曲線 C に対して

$$\int_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z) dz$$

(2) $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$

証明 $S_n(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ とおくと $\{S_n(z)\}$ は $S(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ に D 上広義一様収束する．

(1) $S_n(z)$ は $S(z)$ に C 上一様収束するので命題6.4より

$$\lim_{n\to\infty} \int_C S_n(z) dz = \int_C S(z) dz = \int_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz$$

一方

$$\lim_{n\to\infty} \int_C S_n(z) dz = \lim_{n\to\infty} \int_C \sum_{k=1}^{n} f_k(z) dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_C f_k(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z) dz$$

以上より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz$ が成り立つ．

(2) 定理6.5より $S(z)$ は D で正則であり，定理6.6より

$$S_n'(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(z)$$

は

$$S'(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)'$$

に D 上一様収束する．つまり

$$\lim_{n\to\infty} S_n'(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)'$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k'(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)'$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)'$$

6.4 補足 1

連続曲線 $C : z = z(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ が与えられたとき，C は有界閉集合である．

証明

- $z(t) = x(t) + iy(t)$ （$x(t)$, $y(t)$: $[\alpha, \beta]$ 上の実数値連続関数）とすると

  $$|z(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

  である．$x(t), y(t)$ は $[\alpha, \beta]$ で連続であるから，ある $M > 0$ が存在して，$|x(t)|$, $|y(t)| \leq M$ $(t \in [\alpha, \beta])$ が成り立つ．よって

  $$|z(t)| \leq \sqrt{M^2 + M^2} = \sqrt{2}M$$

  したがって有界である．

- 次に C が $\mathbb{C}$ の閉集合であることを示す．そのためには $\mathbb{C} \backslash C$ が開集合であることを示す．

- $z_0 \in \mathbb{C} \backslash C$ を任意にとる．このとき

  $$|z(t) - z_0| > 0 \quad (t \in [\alpha, \beta])$$

  である．なぜなら，ある $t_0 \in [\alpha, \beta]$ で $|z(t_0) - z_0| = 0$ ならば $z_0 = z(t_0)$ であり，$z_0 \in C$ となってしまう．

- 次に $|z(t) - z_0|$ は $[\alpha, \beta]$ 上の連続関数であるから最小値 m_0 をとるが，$m_0 > 0$ である（$m_0 = 0$ ならば同様に $z_0 \in C$ となってしまう）．よって $|z(t) - z_0| \geq m_0 > 0$ $(t \in [\alpha, \beta])$ が成り立つ．したがって $U_{m_0/2}(z_0) \subset \mathbb{C} \backslash C$ となり，$\mathbb{C} \backslash C$ が開集合であることが示された．よって C が閉集合であるとわかる．□

6.5 補足２：定理 6.6 の証明

$k=1$ の場合のみ示す（$k \geq 2$ の場合も同じ）．

Step 1:「任意の $z_0 \in D$ に対して，ある $r_0 > 0$ が存在して $\overline{U_{r_0}(z_0)}$ 上で $\{f'_n(z)\}$ は $f'(z)$ に一様収束すること」を示す．

- $z_0 \in D$ を任意にとると，D は開集合であるから，ある $\rho_0 > 0$ が存在して $\overline{U_{\rho_0}(z_0)} \subset D$ とできる．

- $\overline{U_{\rho_0}(z_0)}$ 上で $\{f_n(z)\}$ は $f(z)$ に一様収束するので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

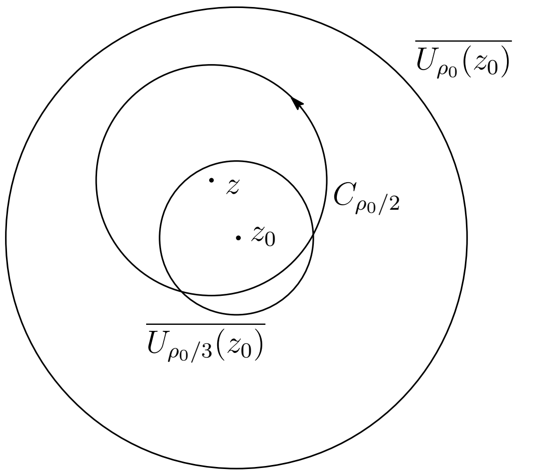
$$n \geq n_0,\ z \in \overline{U_{\rho_0}(z_0)} \quad \Rightarrow \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

  が成り立つ．

- $\overline{U_{\rho_0/3}(z_0)}$ 上 $\{f'_n(z)\}$ は $f'(z)$ に一様収束することを示す（$r_0 = \rho_0/3$ とすれば Step 1 の証明が終わる）．

  任意の $z \in \overline{U_{\rho_0/3}(z_0)}$ に対して z 中心，半径 $\rho_0/2$ の円 $C_{\rho_0/2}$ は $\overline{U_{\rho_0}(z_0)}$ に含まれる．実際

$$\zeta \in C_{\rho_0/2} \quad \Rightarrow \quad |\zeta - z_0| \leq |\zeta - z| + |z - z_0| < \frac{\rho_0}{2} + \frac{\rho_0}{3} = \frac{5}{6}\rho_0 \text{ よって } \zeta \in \overline{U_{\rho_0}(z_0)}$$



- よって Cauchy の積分公式から

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_0/2}} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta, \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_0/2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta$$

  これより

$$|f'_n(z) - f'(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_{\rho_0/2}} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta\right|$$

ここで $\zeta \in C_{\rho_0/2} \subset \overline{U_{\rho_0}(z_0)}$ に対して $|\zeta - z| = \rho_0/2$, $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon$ が成り立つから複素積分の評価式 (1.2) より

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{\rho^2} \cdot \varepsilon \cdot 2\pi \frac{\rho_0}{2} = \frac{2}{\rho_0}\varepsilon$$

ここで ρ_0 は z, n に無関係（z_0 にのみ依存）し，この不等式が任意の $n \geq n_0$, $z \in \overline{U_{\rho_0/3}(z_0)}$ に対して成り立つのだから，これが $\{f_n'(z)\}$ が $f'(z)$ に $\overline{U_{\rho_0/3}(z_0)}$ 上一様収束することを意味する．

Step 2:「$K(\subset D)$ を任意のコンパクト集合とするとき，$\{f_n'(z)\}$ は $f'(z)$ に K 上一様収束すること」を示す．

- $K \subset D$ をコンパクト集合とする．Step 1 より各 $a \in K$ に対し，$r_a > 0$ が存在して $\overline{U_{r_a}(a)} \subset D$ で $\{f_n'(z)\}$ は $f'(z)$ に $\overline{U_{r_a}(a)}$ 上一様収束する．
- $K \subset \displaystyle\bigcup_{a \in K} U_{r_a}(a)$ であるから $\{U_{r_a}(a) | a \in K\}$ はコンパクト集合 K の開被覆である．よって $a_1, a_2, \cdots, a_p \in K$ （対応する r_{a_i} を r_i とかく）が存在して

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{p} U_{r_i}(a_i) \subset \bigcup_{i=1}^{p} \overline{U_{r_i}(a_i)}$$

- 任意の $\varepsilon > 0$ をとると，ある $n_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \cdots, p)$ が存在して

$$n \geq n_i, \quad z \in \overline{U_{r_i}(a_i)} \quad \Rightarrow \quad |f_n'(z) - f'(z)| < \varepsilon$$

  が成り立つ．ここで $N = \max\{n_1, \cdots, n_p\}$ とすれば

$$n \geq N, \ z \in K \quad \Rightarrow \quad |f_n'(z) - f'(z)| < \varepsilon$$

  が成り立つ．これは $\{f_n'(z)\}$ が $f'(z)$ に K 上一様収束することを意味する．
  $\square$

7　べき級数とその収束半径

7.1　べき級数

$a \in \mathbb{C}$, $\{c_n\}$ を複素数列とするとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{7.1}$$

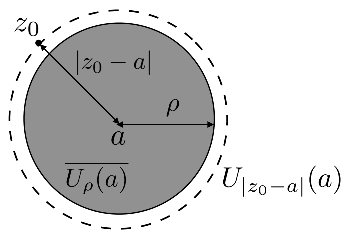
の形の関数項級数をa を中心とする**べき級数**あるいは**整級数**という．べき級数 (7.1) は $z=a$ のときは明らかに収束するが，それ以外の z で収束するかどうかはわからない．

命題 7.1

べき級数 (7.1) がある $z=z_0$ で収束するとする．このとき $0<\rho<|z_0-a|$ なる任意の ρ に対してべき級数 (7.1) は $\overline{U_\rho(a)}$ 上一様に絶対収束する（実際，$U_{|z_0-a|}(a)$ 上広義一様に絶対収束する）．特に (7.1) は $|z-a|<|z_0-a|$ ならば絶対収束する．

証明

- $0<\rho<|z_0-a|$ なる ρ を 1 つとる．



- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n$ は収束するので命題 5.4 より

$$\lim_{n\to\infty} |c_n(z_0-a)^n| = 0$$

  が成り立つ．次に命題 5.1 よりある $K>0$ が存在して

$$|c_n(z_0-a)^n| \le K \ (n=0,1,\cdots)$$

  が成り立つ．

- このとき $|z-a|\le\rho$ ならば

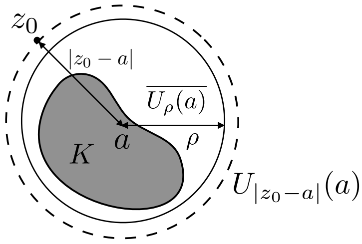
$$\begin{aligned}|c_n(z-a)^n| &= |c_n(z_0-a)^n|\frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n}\\ &\le K\left(\frac{\rho}{|z_0-a|}\right)^n \quad (n=0,1,\cdots)\end{aligned}$$

- ここで $0<\dfrac{\rho}{|z_0-a|}<1$ より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} K\left(\frac{\rho}{|z_0-a|}\right)^n$ は収束する．よって Weierstrass の M-test（定理 6.8）より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ は $\overline{U_\rho(a)}$ 上一様に絶対収束する．□

注 $K \subset U_{|z_0-a|}(a)$ を $U_{|z_0-a|}(a)$ の任意のコンパクト集合（有界閉集合）とすると，ある ρ $(0 < \rho < |z_0 - a|)$ が存在して

$$K \subset \overline{U_\rho(a)} \subset U_{|z_0-a|}(a)$$

とできる．よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ は $\overline{U_\rho(a)}$ 上一様に絶対収束するので K 上でもそうである．よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ は $U_{|z_0-a|}(a)$ 上広義一様に絶対収束する．



7.2 べき級数の収束半径

命題 7.2

べき級数 (7.1) に対して，次を満たす R がただ一つ定まる：

$$\begin{aligned} |z-a| < R \quad &\Rightarrow \quad (7.1) \text{ は（絶対）収束} \\ |z-a| > R \quad &\Rightarrow \quad (7.1) \text{ は発散} \end{aligned}$$

ただし，すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して (7.1) が収束するときは $R = \infty$，$z = a$ 以外の z で (7.1) が発散するときは $R = 0$ と定める．

証明

- R を次のように定める：

$$R := \sup \left\{ |z_0 - a| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n \text{ が収束する} \right\}$$

この R が条件を満たすことを示そう．

- $|z_1 - a| < R$ とすると上限（sup）の定義から

$$|z_1 - a| < |z_0 - a| < R \text{ かつ } \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n \text{ が収束する}$$

となる z_0 が存在する．

- よって命題 7.1 より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-a)^n$ は（絶対）収束する．

- 次に $|z_1 - a| > R$ とする．もし $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-a)^n$ が収束するとすると R の定義に反する．よって $|z_1 - a| > R$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-a)^n$ は発散する．□

注 $|z-a|=R$ のときの収束性はべき級数により異なる．

定義

級数 (7.1) に対して命題 7.2 で定まる R （0 や ∞ の場合も含む）を級数 (7.1) の**収束半径**という．

命題 7.3

べき級数 (7.1) の収束半径を R とする．$R>0$ あるいは $R=\infty$ のとき，任意の $0<\rho<R$ に対してべき級数 (7.1) は $\overline{U_\rho(a)}$ 上一様に絶対収束する（命題 7.1 の証明の後の **注** より (7.1) は $U_R(a)$ 上広義一様に絶対収束する）．

証明 $0<\rho<R$ とすると収束半径（および上限）の定義より

$$\rho<|z_0-a|<R, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n \ \text{は収束}$$

を満たす z_0 が存在する．したがって命題 7.1 より級数 (7.1) は $\overline{U_\rho(a)}$ 上一様に絶対収束する．□

命題 7.4

級数 (7.1) の収束半径を R とする（$0, \infty$ を含む）．

(1) （**Cauchy-Hadamard の公式**） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=l$ が存在すれば $R=\dfrac{1}{l}$.

(2) （**d'Alembelt の公式**） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=l$ が存在すれば $R=\dfrac{1}{l}$.

（$l=0$ のとき $1/l=\infty$, $l=\infty$ のとき $1/l=0$ とする.）

証明 $z\in\mathbb{C}$ に対して $a_n=c_n(z-a)^n$ とおくと (7.1) は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ と表される．

(1)

- $l\neq 0,\infty$ とする

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{|c_n|}|z-a| \ \text{より} \ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{|c_n|}|z-a|)=l|z-a|$$

である．Cauchy-Hadamard の判定法（定理 5.9）より

  - $l|z-a|<1$ つまり $|z-a|<\dfrac{1}{l}$ のとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ つまり $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ は収束する．
  - $l|z-a|>1$ つまり $|z-a|>\dfrac{1}{l}$ のとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ つまり $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ は発散する．

よって収束半径の定義より $R = \dfrac{1}{l}$ である．

- $l = 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 < 1$ がすべての z に対して成り立つので $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ つまり $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ がすべての z に対して収束する．よってこのとき $R = \infty$ である．
- $l = \infty$ のとき，$z \neq a$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ つまり $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ は a 以外のすべての z に対して発散する．よってこのとき $R = 0$ である．

(2)

- $l \neq 0, \infty$ とする

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |z-a| \quad \text{より}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |z-a| = l|z-a|$$

である．d'Alembelt の判定法（定理 5.10）より

  - $l|z-a| < 1$ つまり $|z-a| < \dfrac{1}{l}$ のとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ つまり $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ は収束する．
  - $l|z-a| > 1$ つまり $|z-a| > \dfrac{1}{l}$ のとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ つまり $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ は発散する．

よって収束半径の定義より $R = \dfrac{1}{l}$ である．

- $l = 0, \infty$ のときは (1) と同様に考えればよい．

□

注 上の命題において極限が存在しなくても上極限とよばれるものが存在すればよい．つまり $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l$ あるいは $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l$ であれば同じことが成り立つ．

注 べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径 $R = 1$ の場合，$z = 1$ でべき級数が収束する，つまり $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が収束する場合，$|z| < 1$ でべき級数が定義する関数の $z = 1$ における連続性について **Abel の連続性定理**とよばれる定理が知られている．補足で述べる．

7.3 べき級数の微分・積分

べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ の収束半径を $R>0$ とする．このとき $U_R(a)$ （$R=\infty$ ならば $\mathbb{C}$（以下略)）で収束するのでその和は $U_R(a)$ で定義された関数となる．それを $f(z)$ とおく．

定理 7.5

べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ の収束半径を R とする．このべき級数が $U_R(a)$ で定義する関数を $f(z)$ とすると次が成り立つ．

(1) $f(z)$ は $U_R(a)$ で正則．

(2) べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ の収束半径も R であり

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1} \quad \text{in} \quad U_R(a)$$

が成り立つ．

(3) べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}c_n(z-a)^{n+1}$ の収束半径も R であり

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}c_n(z-a)^{n+1}$$

とおくと

$$F'(z)=f(z) \quad \text{in} \quad U_R(a)$$

が成り立つ．

補題 7.6

$0<r<1$ のとき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$ は収束する．

証明

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}=1+2r+\cdots+nr^{n-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} S_n &= 1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1} \\ rS_n &= \qquad\ r+2r^2+\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n \end{aligned}$$

であるから

$$(1-r)S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n = \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$$

ここで $0 < r < 1$ より $\lim_{n\to\infty} r^n = 0,\ \lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{(1-r)^2}$$

よって収束する．□

定理 7.5 の証明

(1)

- 命題 7.3 より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ は $U_R(a)$ 上広義一様収束する．
- このべき級数の第 n 部分和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k(z-a)^k$ は $\mathbb{C}$ 上（特に $U_R(a)$ 上）で正則である．上の広義一様収束とはこの第 n 部分和が $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ に $U_R(a)$ 上広義一様収束するということだから定理 6.5 より $f(z)$ は $U_R(a)$ で正則である．

(2)

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ の収束半径を R' とする．
- まず $R \leq R'$ を示す．そのために $|z-a| < R$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |nc_n(z-a)^{n-1}|$ は収束することを示す．そうすれば，少なくとも $|z-a| < R$ なる z に対しては $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ は収束するのでその収束半径 R' は R 以上でなければならない．
- さて $|z-a| < R$ とする．このとき $|z-a| < \rho < R$ なる ρ をとると $\rho = |z_1 - a|$ となる $z_1 \in \mathbb{C}$ に対して命題 7.3 より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-a)^n$ は絶対収束する，つまり $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\rho^n$ は収束する．

- よって命題5.4より $\lim_{n\to\infty}|c_n|\rho^n = 0$ が成り立つ．したがって命題5.1よりある $K > 0$ が存在して

$$|c_n\rho^n| \le K \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ．

- このとき

$$\begin{aligned}|nc_n(z-a)^n| &= \left|nc_n\rho^n\left(\frac{z-a}{\rho}\right)^n\right| \\ &= |c_n\rho^n|\left|n\left(\frac{z-a}{\rho}\right)^n\right| \\ &\le Kn\left(\frac{|z-a|}{\rho}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

ここで $0 \le \dfrac{|z-a|}{\rho} < 1$ であるから補題7.6より

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{|z-a|}{\rho}\right)^n = \frac{|z-a|}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{|z-a|}{\rho}\right)^{n-1}$$

は収束する．したがって命題5.7より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^n$ は（絶対）収束する．以上より $R \le R'$ が成り立つことがわかった．

- 次に $R' \le R$ を示す．そのために

$$|z-a| < R' \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}|c_n(z-a)^n| \text{ は収束する}$$

を示す．

- $|z-a| < R'$ としよう．$|z-a| < \rho < R'$ なる ρ をとると命題7.3より $\rho = |z_1 - a|$ なる z_1 に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z_1-a)^n$ は絶対収束する．つまり $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|\rho^{n-1}$ は収束する．

- よってこのとき

$$|c_n(z-a)^n| \le n|c_n(z-a)^n| = n|c_n||z-a|^n \le n|c_n|\rho^n = \rho(n|c_n|\rho^{n-1}) \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|\rho^{n-1}$ は収束するので命題5.7より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ も絶対収束する．したがって $R' \le R$ が成り立つ．以上で $R = R'$ が示された．

- 次に $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ を示す．$c_n(z-a)^n$ は $\mathbb{C}$ で（特に $U_R(a)$ で）正則でかつ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ は $U_R(a)$ 上広義一様収束するので定理 6.9-(2) より

$$f'(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(c_n(z-a)^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$$

(3)

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$ の収束半径を R'' とすると

$$\left(\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}\right)'=c_n(z-a)^n$$

であるから (2) より $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ の収束半径も R'' である．したがって $R=R''$ が成り立つ．

- また (2) より $U_R(a)$ 上

$$\begin{aligned}F'(z)&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}\right)'\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n=f(z)\end{aligned}$$

□

系 7.7

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ の収束半径を R とし $R>0$ または $R=\infty$ とする．このとき $U_R(a)$ でこのべき級数が定義する関数を $f(z)$ とすると次が成り立つ：

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

これはべき級数の係数 c_n は一意的に定まることを意味する．

7.4 補足：Abel の連続性定理

定理 7.8(Abel の連続性定理)

べき級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径を 1 とし，$f(1)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が収束するとする．このとき z が $\dfrac{|1-z|}{1-|z|}$ が有界であるように z が $U_1(0)=\{z : |z|<1\}$ を 1 に限りなく近づけるとき $f(z)$ は $f(1)$ に限りなく近づく．

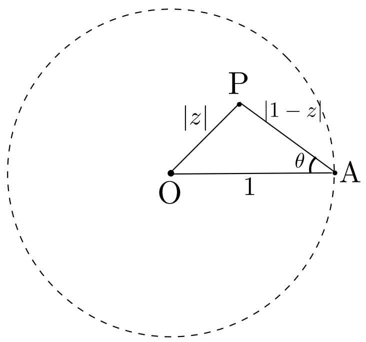
注 「$z\in U_1(0)$ が $\dfrac{|1-z|}{1-|z|}$ が有界であるように 1 に限りなく」の意味を説明しよう．

- $K>0$ を任意の定数とするとき，

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}\le K \quad \text{かつ} \quad |z|<1 \tag{7.2}$$

  とする．

- (7.2) を満たす z に対して，O(0), A(1), P(z) を頂点とする三角形に余弦定理を用いると，AO と AP のなす角を θ とすると



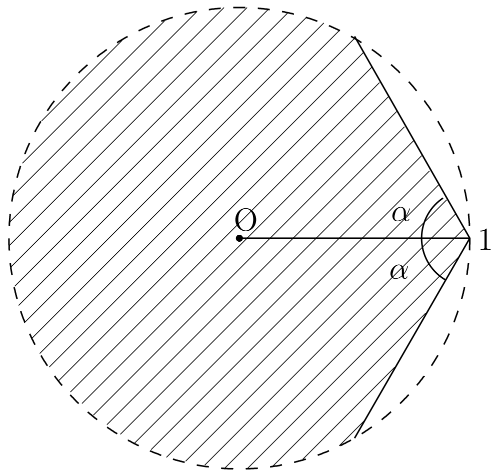
$$|z|^2 = 1^2 + |1-z|^2 - 2\cdot 1\cdot |1-z|\cos\theta$$

  だから (7.2) より

$$\begin{aligned} 2\cos\theta &= \frac{1-|z|^2}{|1-z|} + |1-z| \\ &> \frac{1-|z|^2}{|1-z|} = \frac{(1-|z|)(1+|z|)}{|1-z|} > \frac{1-|z|}{|1-z|} \ge \frac{1}{K} > 0 \end{aligned}$$

- ある $\alpha\in(0,\pi/2)$ が存在して z が (7.2) を満たすならば $|\theta|<\alpha$ となることを意味する．

- 1 を頂点とするとき，開きが 2α の角領域と $|z|<1$ との共通部分を **Stolz の角領域**という．



証明

- $K>0$ を任意にとる．次に $\varepsilon>0$ を任意にとる．
- このとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ は収束するから，命題 5.5 よりある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$n>m \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} c_k\right| < \varepsilon$$
が成り立つ．
- $m \geq n_0$ を任意に固定し $s_n = \displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} c_k$ とおく．このとき $n>m$ ならば $|s_n|<\varepsilon$ が成り立つ．
- また
$$\begin{aligned}
&c_{m+1}z^{m+1} + c_{m+2}z^{m+2} + \cdots + c_n z^n \\
=&s_{m+1}z^{m+1} + (s_{m+2}-s_{m+1})z^{m+2} + \cdots + (s_n - s_{n-1})z^n \\
=&s_{m+1}(z^{m+1}-z^{m+2}) + s_{m+2}(z^{m+2}-z^{m+3}) + \cdots + s_{n-1}(z^{n-1}-z^n) + s_n z^n \\
=&\sum_{k=m+1}^{n-1} s_k(z^k - z^{k+1}) + s_n z^n \\
=&\sum_{k=m+1}^{n-1} s_k z^k(1-z) + s_n z^n \\
=&(1-z)\sum_{k=m+1}^{n-1} s_k z^k + s_n z^n
\end{aligned}$$
である．

- したがって (7.2) あるいは $z = 1$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m+1}^{n} c_k z^k\right| &= \left|(1-z)\sum_{k=m+1}^{n-1} s_k z^k + s_n z^n\right| \\
&\le |1-z| \sum_{k=m+1}^{n-1} |s_k||z|^k + |s_n| \\
&< \varepsilon|1-z| \sum_{k=m+1}^{n-1} |z|^k + \varepsilon \\
&\le \varepsilon|1-z| \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k + \varepsilon \\
&= \varepsilon\frac{|1-z|}{1-|z|} + \varepsilon \le (1+K)\varepsilon
\end{aligned}$$

- まとめると

$$n > m \ge n_0,\ \frac{|1-z|}{1-|z|} \le K \quad \text{または} \quad z = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n} c_k z^k\right| < (1+K)\varepsilon$$

これは

$$E_K = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{|1-z|}{1-|z|} \le K, |z| < 1 \right\} \cup \{1\}$$

で定義された関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が Cauchy の条件（定理 6.7）を満たすことを意味する．したがって $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は E_K 上一様収束する．したがってこの関数項級数は E_K 上で連続である．

- したがって

$$\lim_{z \to 1, z \in E_K \setminus \{1\}} f(z) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

□

$\boxed{\text{注}}$ Abel の連続性定理により

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots &= \log 2 \\
1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{2n+1} + \cdots &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

などが正当化される．

8 Taylor の定理

定理 8.1(Taylor の定理)

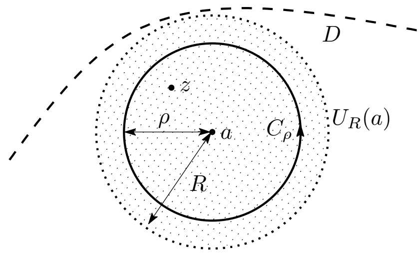
関数 $f(z)$ は領域 D で正則であるとする．このとき，任意の $a \in D$ と $U_R(a) \subset D$ を満たす任意の $R > 0$ に対して $f(z)$ は $U_R(a)$ で次のようなべき級数（a を中心とする**Taylor 級数**）で表される：

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots$$

さらに上のべき級数は $U_R(a)$ 上広義一様に絶対収束する．

証明

- $a \in D$ と $U_R(a) \subset D$ を満たす $R > 0$ を任意にとる．
- $z \in U_R(a)$ とすると，ある $0 < \rho < R$ に対して a 中心，半径 ρ の円 C_ρ は内部に z を含む．



- Cauchy の積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

- ここで

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta-a}}$$

と変形する．$|z-a| < \rho$, $|\zeta - a| = \rho$ $(\zeta \in C_\rho)$ であるから

$$0 \leq \left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = \frac{|z-a|}{|\zeta-a|} < 1$$

である．したがって

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

- $z \in U_R(a)$ は固定されていることに注意し

$$g_n(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

とおく．$f(\zeta)$ は C_ρ 上で連続なので

$$|f(\zeta)| \leq M \quad (\zeta \in C_\rho)$$

なる $M > 0$ が存在する．

- したがって

$$|g_n(\zeta)| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - a|}\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|^n \leq \frac{M}{\rho}\left(\frac{|z-a|}{\rho}\right)^n \quad (\zeta \in C_\rho)$$

(z は固定されていることに注意)

- ここで $0 \leq \dfrac{|z-a|}{\rho} < 1$ より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{\rho}\left(\frac{|z-a|}{\rho}\right)^n$ は収束する．よって Weierstrass の $M-$test より関数項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

は C_ρ 上一様収束する．

- これより

$$\begin{aligned}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= \int_{C_\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right\}(z-a)^n\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right\}(z-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right\}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n\end{aligned}$$

ここで Cauchy の積分公式の微分形

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

を用いた．

- このべき級数が $U_R(a)$ 上広義一様に絶対収束することを示すには任意の $0 < \rho < R$ に対して $\overline{U_\rho(a)}$ 上一様に絶対収束することを示せば十分だが，それは命題 7.3 の証明と同様である．□

- $a = 0$ のときの Taylor 級数を **Maclaurin 級数**という：

$$f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots$$

- Maclaurin 級数の例として次のようなものがある：

$$\begin{aligned}
e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \quad (|z| < \infty) \\
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (|z| < \infty) \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (|z| < \infty) \\
\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \quad (|z| < 1)
\end{aligned}$$

例題 1

$f(z) = \dfrac{1}{z}$ を $z = 1$ を中心とする Taylor 級数で表せ．

$\boxed{\text{解}}$

- $f(z) = z^{-1}$, $f'(z) = -z^{-2}$, $f''(z) = 2z^{-3}$, $f^{(3)}(z) = -2 \cdot 3z^{-4}$, $\cdots$,

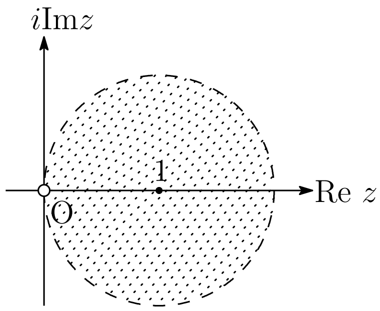
  $f^{(n)}(z) = (-1)^n n! z^{-(n+1)}$ より $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$, $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^n$

- よって $z = 1$ 中心の Taylor 級数は

  $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n = 1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots+(-1)^n(z-1)^n+\cdots$$

- ここで $\dfrac{1}{z}$ は $|z-1|<1$ で正則であるから Taylor 級数は $|z-1|<1$ で収束して

  $$\frac{1}{z} = 1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots+(-1)^n(z-1)^n+\cdots \quad (|z-1|<1)$$



$\boxed{\text{注}}$ べき級数展開の一意性を用いれば $f^{(n)}(a)$ を求めなくてもいいことがある：

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)}$$

と書けるので $|1-z| = |z-1| < 1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} &= 1+(1-z)+(1-z)^2+\cdots+(1-z)^n+\cdots \\ &= 1-(z-1)+(z-1)^2+\cdots+(-1)^n(z-1)^n+\cdots \quad (|z-1|<1)\end{aligned}$$

- 定理 7.5 と定理 8.1 より次のことがわかる：

  D を領域とするとき，$f : D$ で正則 $\Leftrightarrow$

  任意の $a \in D$ に対してある $R > 0$ と $\{c_n\}$ が存在して

  $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad \text{on} \quad U_R(a)$$

  が成り立つ.

9 Laurent 展開

9.1 Laurent 展開

- Taylor 展開を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{e^z}{z} &= \frac{1}{z}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\frac{z^n}{(n+1)!}+\cdots \quad (z \neq 0) \\
\frac{\sin z}{z} &= 1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots \quad (z \neq 0)
\end{aligned}
$$

という等式が得られる．ここで $\frac{e^z}{z}$, $\frac{\sin z}{z}$ は $z=0$ で正則でなく，$z=0$ は孤立特異点である．このように $z=a$ で $f(z)$ が正則でないとき（詳しくは孤立特異点であるとき）$f(z)$ を負の指数を含むべき級数で表すことができる．一般には円環領域 $\{z \in \mathbb{C} | R_1 < |z-a| < R_2\}$ で正則な関数は次の定理で示されるように $(z-a)$ の負べきを含むべき級数で表される．

定理 9.1

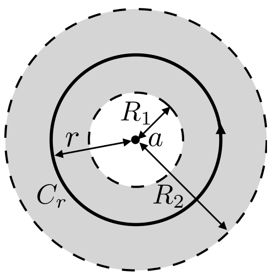
関数 $f(z)$ は $R_1 < |z-a| < R_2$ $(0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty)$ で正則であるとする．このとき $R_1 < |z-a| < R_2$ $(z \in U_{R_2}(a) \backslash \overline{U_{R_1}(a)})$ で

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n} \tag{9.1}
$$

が成り立つ．ここで

$$
c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad n \in \mathbb{Z}
$$

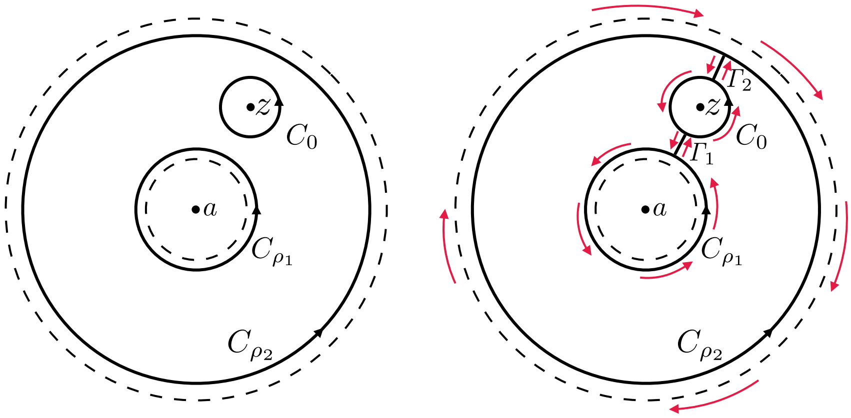
（C_r は中心 a，半径 $r \in (R_1, R_2)$ の円）．



証明

- z を $R_1 < |z-a| < R_2$ を満たすとする．
- $R_1 < \rho_1 < |z-a| < \rho_2 < R_2$ を満たす ρ_1, ρ_2 をとり，中心 a，半径 ρ_i の円 C_{ρ_i} $(i=1,2)$ とする．
- 次に ρ を，中心 z，半径 ρ の円 C_0 が C_{ρ_1} と C_{ρ_2} で挟まれた領域に含まれるようにとる．
- $f(z)$ は C_0 の周およびその内部で正則であるから Cauchy の積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{9.2}$$



- 上の右図のように Γ_1, Γ_2 をとり矢印に沿った閉曲線を考えるとそれとにより囲まれる領域で $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ は正則であるから Cauchy の積分定理より

$$\int_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{C_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

- (9.2) より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{9.3}$$

- $\displaystyle\int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ について考える．

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}}$$

と変形する．$|z-a|<\rho_2$, $|\zeta-a|=\rho_2$ $(\zeta\in C_{\rho_2})$ であるから

$$0\le\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{|z-a|}{|\zeta-a|}=\frac{|z-a|}{\rho_2}<1$$

である．よって

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

- $z\in U_{\rho_2}(a)\backslash\overline{U_{\rho_1}(a)}$ は固定されていることに注意し

$$g_n(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

とおき，関数項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}g_n(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

を考える．

- $f(\zeta)$ は C_{ρ_2} 上で連続なので

$$|f(\zeta)|\le M\quad(\zeta\in C_{\rho_2})$$

なる $M>0$ が存在する．このとき

$$|g_n(\zeta)|=\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|}\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|^n\le\frac{M}{\rho_2}\left(\frac{|z-a|}{\rho_2}\right)^n\qquad(\zeta\in C_{\rho_2})$$

(z は固定されていることに注意)

- ここで $0\le\dfrac{|z-a|}{\rho_2}<1$ より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{\rho}\left(\frac{|z-a|}{\rho_2}\right)^n$ は収束する．よって Weierstrass の $M-$test より関数項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}g_n(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

は C_{ρ_2} 上一様収束する．

- これより

$$\begin{aligned}\int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{C_{\rho_2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} (z-a)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right\} (z-a)^n\end{aligned}$$

- 次に $\displaystyle\int_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ について考える．

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = -\frac{1}{(z-a) - (\zeta - a)} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z-a}}$$

と変形する．$\rho_1 = |\zeta - a| < |z-a|$ $(\zeta \in C_{\rho_1})$ であるから

$$0 \leq \left| \frac{\zeta - a}{z-a} \right| = \frac{|\zeta - a|}{|z-a|} = \frac{\rho_1}{|z-a|} < 1$$

である．よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z-a}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z-a} \right)^n \\ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= -\frac{f(\zeta)}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z-a}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{z-a} \left(\frac{\zeta - a}{z-a} \right)^n\end{aligned}$$

- $z \in U_{\rho_2}(a) \backslash \overline{U_{\rho_1}(a)}$ は固定されていることに注意し

$$h_n(\zeta) = -\frac{f(\zeta)}{z-a} \left(\frac{\zeta - a}{z-a} \right)^n$$

とおき，関数項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(\zeta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{z-a} \left(\frac{\zeta - a}{z-a} \right)^n$$

を考える．

- $f(\zeta)$ は C_{ρ_1} 上で連続なので

$$|f(\zeta)| \leq M' \quad (\zeta \in C_{\rho_1})$$

なる $M' > 0$ が存在する．このとき

$$|h_n(\zeta)| = \frac{|f(\zeta)|}{|z-a|} \left| \frac{\zeta - a}{z-a} \right|^n \leq \frac{M'}{|z-a|} \left(\frac{\rho_1}{|z-a|} \right)^n \quad (\zeta \in C_{\rho_1})$$

(z は固定されていることに注意)

- ここで $0 \leq \dfrac{\rho_1}{|z-a|} < 1$ より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M'}{|z-a|}\left(\frac{\rho_1}{|z-a|}\right)^n$ は収束する．よって Weierstrass の $M-$test より関数項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(\zeta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{z-a}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n$$

は C_{ρ_1} 上一様収束する．

- これより

$$\begin{aligned}
\int_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= -\int_{C_{\rho_1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{z-a}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n d\zeta \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^n \frac{1}{(z-a)^{n+1}}d\zeta \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \left\{\int_{C_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^n d\zeta\right\} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\int_{C_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta\right\} \frac{1}{(z-a)^{n}}
\end{aligned}$$

- 以上より (9.3) から

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right\}(z-a)^n \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta\right\}\frac{1}{(z-a)^n}
\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$, $f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}$ は $U_{R_2}(a)\backslash\overline{U_{R_1}(a)}$ で正則であるから，任意の $r \in (R_1, R_2)$ に対して

$$\int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$
$$\int_{C_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta = \int_{C_r} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta$$

である．したがって

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

とおけば結論を得る．□

- (9.1) を $f(z)$ の $\underline{R_1 < |z-a| < R_2 \text{ における } z=a \text{ を中心とする}}$ **Laurent 級数**という．

$\boxed{\textbf{注}}$ 証明からわかるように $R_1 < |z-a| < R_2$ において正則な $f(z)$ の a を中心とする Laurent 展開 (9.1) は $|z-a| < R_2$ で収束するベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ と $R_1 < |z-a|$ で収束する負の指数をもつべき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ の和が $f(z)$ に一致するということである．

- 次のように Laurent 展開の一意性が成り立つ．

命題 9.2

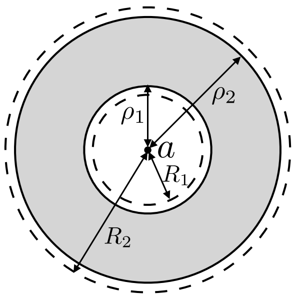
関数 $f(z)$ は $R_1 < |z-a| < R_2$ $(0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty)$ で正則であるとする．$R_1 < |z-a| < R_2$ なる任意の z に対し，２つの級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\frac{1}{(z-a)^n}$$

が収束し，その和が $f(z)$ に一致するとする：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\frac{1}{(z-a)^n}$$

このとき，右辺は任意の $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$ に対して閉円環領域 $\{z \in \mathbb{C} | \rho_1 \leq |z-a| \leq \rho_2\}$ で一様に絶対収束し，$f(z)$ の a を中心とする Laurent 級数と一致する．



証明は「補足」で述べる．

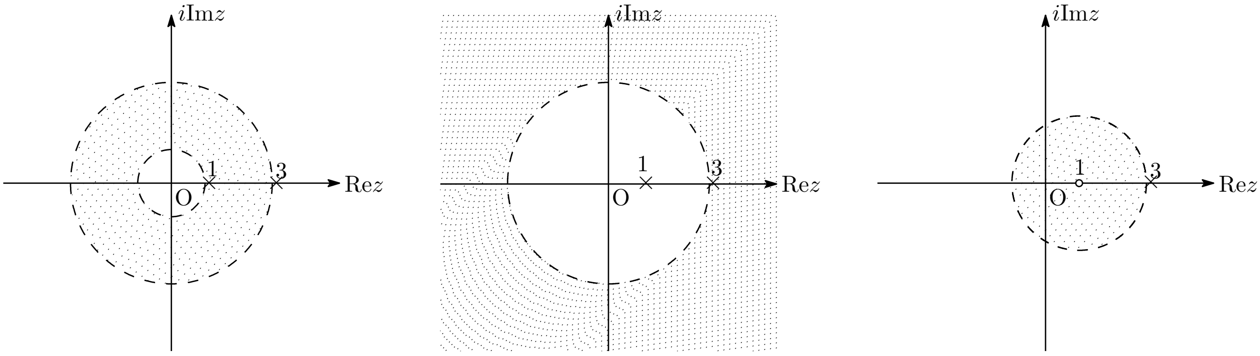
例題 1

$f(z) = \dfrac{2}{(z-1)(z-3)}$ を次の円環領域で Laurent 展開せよ．

(1) $1 < |z| < 3$

(2) $3 < |z| < \infty$

(3) $0 < |z-1| < 2$



$\boxed{\textbf{解}}$ $f(z) = \dfrac{1}{z-3} - \dfrac{1}{z-1}$ である．Laurent 展開の一意性（命題 9.2）より定義により係数を計算しなくても既存の公式から (9.1) の形を作ればよい．

(1) $1 < |z| < 3$ より $\left|\dfrac{z}{3}\right| < 1, \left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$ だから

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

したがって

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \quad (1 < |z| < 3)$$

(2) $|z| > 3$ より $\left|\dfrac{3}{z}\right| < 1, \left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$ より

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}$$

同様に

$$\frac{1}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

したがって

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-1}{z^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-1}-1}{z^n}\quad(|z|>3)$$

(3) $\displaystyle\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-1-2}=-\frac{1}{2-(z-1)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}$ である．

$|z-1|<2$ より $\left|\dfrac{z-1}{2}\right|<1$ だから

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n$$

したがって

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n-\frac{1}{z-1}$$

である．

(1), (2) のように中心となる点が同じでも円環領域が異なれば Laurent 展開は一般に異なる．

9.2 補足

ここでは命題 9.2 の証明を行う．

$R_1<|z-a|<R_2$ において $f(z)$ が正則とし，$R_1<|z-a|<R_2$ なる任意の z に対し，2 つの級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\quad\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\frac{1}{(z-a)^n}$$

が収束し，その和が $f(z)$ に一致するとする：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\frac{1}{(z-a)^n}\quad(R_1<|z-a|<R_2)\tag{9.4}$$

Step 1. 任意の $R_1<\rho_1<\rho_2<R_2$ に対して (9.4) の右辺は $\rho_1\le|z-a|\le\rho_2$ で一様に絶対収束する．

- 仮定より $\rho_2 < |z_2 - a| < R_2$ なる z_2 に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_2 - a)^n$ は収束する．よって命題 7.1 より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ は $\overline{U_{\rho_2}(a)}$ で一様に絶対収束する．

- 同じく仮定より $R_1 < |z_1 - a| < \rho_1$ なる z_1 に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z_1 - a)^{-n}$ は収束する．よって命題 5.4 より

$$\lim_{n\to\infty} |c_{-n}(z_1 - a)^{-n}| = 0$$

したがって命題 5.1 よりある $M > 0$ が存在して

$$|c_{-n}(z_1 - a)^{-n}| \leq M \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．

- $|z - a| \geq \rho_1$ のとき

$$\begin{aligned}
|c_{-n}(z-a)^{-n}| &= |c_{-n}(z_1 - a)^{-n}(z_1 - a)^n (z-a)^{-n}| \\
&= |c_{-n}(z_1 - a)^{-n}| \left| \frac{z_1 - a}{z - a} \right|^n \\
&\leq M \left(\frac{|z_1 - a|}{\rho_1} \right)^n \quad (|z - a| \geq \rho_1)
\end{aligned}$$

ここで $0 < \dfrac{|z_1 - a|}{\rho_1} < 1$ より級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} K \left(\frac{|z_1 - a|}{\rho_1} \right)^n$ は収束する．

よって Weierstrass の $M-$ test より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ は $|z - a| \geq \rho_1$ 上一様に絶対収束する．

- 以上より

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}$$

は $\rho_1 \leq |z - a| \leq \rho_2$ 上一様に絶対収束する．

<u>**Step 2.**</u> $R_1 < r < R_2$ なる r をとれば $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$ である，つまり (9.4) は $z = a$ を中心とした Laurent 級数に一致する．

- $R_1 < r < R_2$ なる r をとると $R_1 < \rho_1 < r < \rho_2 < R_2$ なる ρ_1, ρ_2 がとれて，$\rho_1 \leq |z - a| \leq \rho_2$ で (9.4) は一様に絶対収束し，その和は $f(z)$ に一致する：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}$$

両辺に $(z-a)^{-(k+1)}$ をかけて C_r に沿って積分すると一様収束性から積分と $\sum$ の交換ができて

$$\begin{aligned}
&\int_{C_r} f(z)(z-a)^{-(k+1)}dz \\
&=\int_{C_r}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k-1}+\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\frac{1}{(z-a)^{n+k+1}}\right\}dz \\
&=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{C_r}(z-a)^{n-k-1}dz+\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\int_{C_r}(z-a)^{-(n+k+1)}dz
\end{aligned} \tag{9.5}$$

- $k \geq 0$ のとき，$n=1,2,\cdots$ に対して $n+k+1 \geq 2$ であるから

$$\int_{C_r}(z-a)^{-(n+k+1)}dz = 0$$

一方

$$\int_{C_r}(z-a)^{-(n-k+1)}dz = \begin{cases} 2\pi i & (n=k) \\ 0 & (n \neq k) \end{cases}$$

よってこのとき (9.5) より $\displaystyle\int_{C_r} f(z)(z-a)^{-(k+1)}dz = 2\pi i c_k$ である．

- $k \leq -1$ のとき，$n=0,1,2,\cdots$ に対して $n-k+1 \geq 0$ であるから

$$\int_{C_r}(z-a)^{n-k+1}dz = 0$$

一方

$$\int_{C_r}(z-a)^{-(n+k+1)}dz = \begin{cases} 2\pi i & (n=-k) \\ 0 & (n \neq -k) \end{cases}$$

よってこのとき (9.5) より $\displaystyle\int_{C_r} f(z)(z-a)^{-(k+1)}dz = 2\pi i c_{-(-k)} = 2\pi i c_k$ である．

- 以上より $\displaystyle c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$ が成り立つ．$\square$

10　孤立特異点と留数

10.1　孤立特異点とその分類

関数 $f(z)$ が正則でない点を $f(z)$ の**特異点**という.

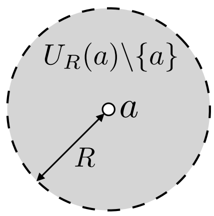
$\boxed{\text{例}}$

(1) $f(z) = \dfrac{1}{(z-\alpha)^m}$ $(m \in \mathbb{N})$ において $z = \alpha$ は特異点である.

(2) $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$ において，$z = 0,\ \dfrac{1}{n\pi}$ $(n \in \mathbb{N})$ は特異点である.

点 α のある近傍 U があって，$f(z)$ が $U \setminus \{\alpha\}$ で正則（でかつ U で正則でない）とき，α を $f(z)$ の**孤立特異点**という．上の例において，(1) の $z = \alpha$ は孤立特異点であるが，(2) の $z = 0$ は孤立特異点ではない（ 0 のどんな近傍においても 0 以外の特異点が存在する）.

- $z = a$ を $f(z)$ の孤立特異点とすると，ある $R > 0$ が存在して $f(z)$ は $U_R(a) \setminus \{a\}$ で正則である.
- よって定理 9.1 と命題 9.2 より $f(z)$ は $\underline{U_R(a) \setminus \{a\}}$ で Laurent 級数で表される.



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n} \quad (z \in U_R(a) \setminus \{a\}) \tag{10.1}$$

- このとき，上の式を<u>孤立特異点 a における</u> **Laurent 展開**という.
- $f(z)$ の a における Laurent 展開 (10.1) において

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}$$

をその**主要部**といい，$P(f)$ ともかかれる.

- 主要部により，孤立特異点は次のように分類される.

(1) **主要部がない場合**

$c_{-n} = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ のとき a を $f(z)$ の**除去可能特異点**という．このとき $\lim_{z \to a} f(z) = c_0$ となり $f(a) = c_0$ とすれば $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ となる．定理 7.5 より $f(z)$ は $U_R(a)$ で正則となる．

(2) **主要部が有限個の項からなる場合**

$$c_{-k} \neq 0 \ \text{かつ}\ c_{-n} = 0 \ (n \geq k+1) \tag{10.2}$$

となる $k \in \mathbb{N}$ が存在するとき a は $f(z)$ の ***k* 位の極**であるという．

(3) **主要項が無限個の項からなる場合**

任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $n > m$ かつ $c_{-n} \neq 0$ なる n が存在するとき，a は $f(z)$ の**真性特異点**であるという．

例

(1) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} - \cdots$ $(0 < |z| < \infty)$ より $z = 0$ は $f(z)$ の除去可能特異点である．

(2) $g(z) = \dfrac{e^z}{z} = \dfrac{1}{z} + 1 + \dfrac{z}{2!} + \cdots + \dfrac{z^{n-1}}{n!} + \cdots$ $(0 < |z| < \infty)$ より $z = 0$ は $g(z)$ の 1 位の極である．

(3) $h(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2! z^2} + \cdots + \dfrac{1}{n! z^n} + \cdots$ $(0 < |z| < \infty)$ より $z = 0$ は $h(z)$ の真性特異点である．

- 除去可能特異点について次のことが知られている．

定理 10.1（Riemann の除去可能定理）

a が関数 $f(z)$ の除去可能特異点であるための必要十分条件はある $R_0 > 0$ が存在して $0 < |z-a| < R_0$ において $f(z)$ が有界であること，つまり $|f(z)| \leq M$ $(0 < |z-a| < R_0)$ なる R_0, $M > 0$ が存在することである．

証明

- a は孤立特異点であるから，ある $R > 0$ が存在して $f(z)$ は $U_R(a) \backslash \{a\}$ で正則である．

- a が $f(z)$ の除去可能特異点であるとすると $f(z)$ の $U_R(a) \backslash \{a\}$ における a における Laurent 展開は主要部がなく

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (0 < |z-a| < R)$$

となる．ここで $f(a)=c_0$ と定義すれば上の等式は $|z-a|<R$ で成り立つ．べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ は $|z-a|<R$ で収束するので命題 7.1 を用いると $|z-a|<R$ で正則であることがわかる．特に $0<R_0<R$ とすれば $|z-a|\le R_0$ で $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ は連続で有界である．したがって $f(z)$ は $0<|z-a|<R_0$ で有界となる．

- 逆にある $R_0>0$ が存在して $f(z)$ が $0<|z-a|<R_0$ で有界であるとすると，ある $M>0$ が存在して $|f(z)|\le M$ $(0<|z-a|<R_0)$ が成り立つ．$R_0=R$ としてよい（もしそうでなければ R_0 を改めて R とすればよい）．つまり $f(z)$ は $0<|z-a|<R$ で正則でかつ有界である．

- $f(z)$ の $0<|z-a|<R$ において (10.1) のように Laurent 展開される．このとき任意の $r\in(0,R)$ に対して

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta \quad (n=1,2,\cdots)$$

である．C_r 上 $|f(\zeta)|\le M$, $|\zeta-a|^{n-1}=r^{n-1}$ であるので $|f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}|\le Mr^{n-1}$ が C_r 上で成り立つ．よって複素積分の評価式 (1.2) より

$$|c_{-n}|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_r} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta\right|\le\frac{1}{2\pi}Mr^{n-1}2\pi r=Mr^n$$

が成り立つ．$r\in(0,R)$ は任意に取れるので $r\to+0$ とすると $r^n\to 0$ $(n=1,2,\cdots)$ より $c_{-n}=0$ $(n=1,2,\cdots)$ が成り立つ．つまり Laurent 展開の主要部がないので a は除去可能特異点である．□

定理 10.2

a が関数 $f(z)$ の k 位の極でであるための必要十分条件はある $R_0>0$ と $|z-a|<R_0$ において正則な $f_1(z)$ で $f_1(a)\neq 0$ なるものが存在して

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{(z-a)^k},\quad 0<|z-a|<R_0 \tag{10.3}$$

と表されることである．

証明 必要条件を示そう．

- a を k 位の極とする．このときある $R_0>0$ が存在して $f(z)$ の a における Laurent 展開は

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \quad (c_{-k}\neq 0),\quad 0<|z-a|<R_0$$

となる．

- ここで $f_1(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^{n+k}$ とおくと $f(z)$ は $0 < |z-a| < R_0$ で収束するので $f_1(a) = c_{-k}(\neq 0)$ とすれば $f_1(z)$ は $|z-a| < R_0$ で正則となり $f(z)$ は (10.3) のように表される．

十分条件を示そう．

- ある $R_0 > 0$ と $|z-a| < R_0$ において正則な $f_1(z)$ で $f_1(a) \neq 0$ なるものが存在して $f(z)$ が (10.3) のように表されたとする．

- $f(z)$ は $|z-a| < R_0$ で正則なので Taylor の定理 (定理 8.1) より

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad |z-a| < R_0$$

  と表される．ここで $f_1(a) = c_0 \neq 0$

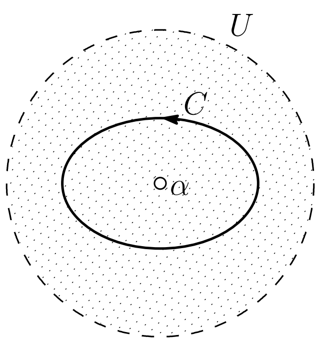
- したがって $0 < |z-a| < R_0$ では

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-a)^k} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \\ &= \frac{c_0}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{z-a} + \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^{n-k} \\ &= \frac{c_0}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{k+n}(z-a)^n \end{aligned}$$

  である．これは $f(z)$ の a のおける Laurent 展開で，a が k 位の極であることを意味する．□

10.2 留数と留数定理

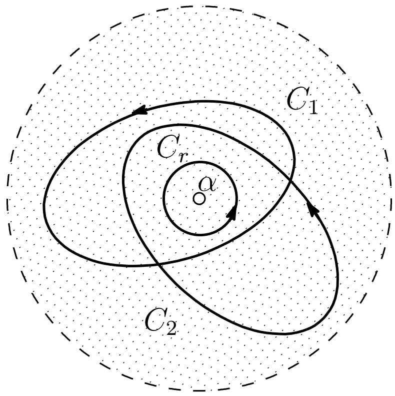
- α を $f(z)$ の孤立特異点とするとある α の近傍 U が存在して $f(z)$ は $U \backslash \{\alpha\}$ で正則である．



- このとき α を内部に含む U 内の単純閉曲線 C をとるとき

$$\int_C f(z)dz$$

の値はこのような曲線 C の選び方に依らない．(Hint: C_1, C_2 に対して，その両方に含まれる α 中心，半径 r の円 C_r をとってみよ．)



- このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

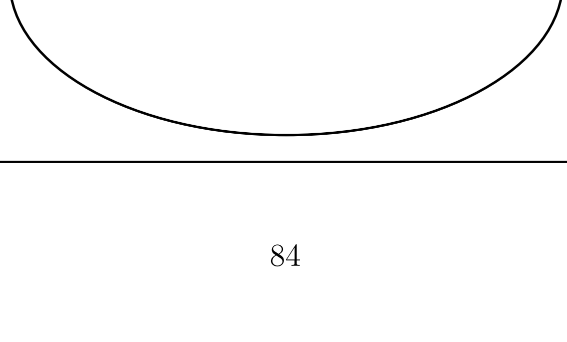
を関数 $f(z)$ の点 α における**留数**といい，次のように表す：

$$\mathrm{Res}[f,\alpha] = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

定理 10.3（留数定理）

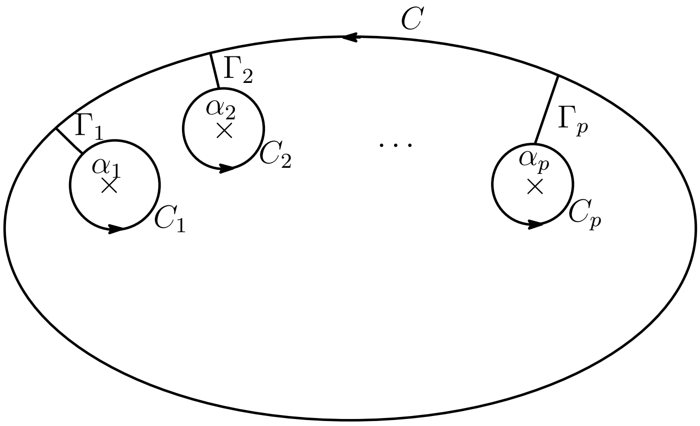
関数 $f(z)$ は単純閉曲線 C の周およびその内部のうち，内部にある有限個の点 α_j $(j = 1, \cdots, p)$ を除いて正則であるとする．このとき，次の等式が成り立つ：

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}[f,\alpha_j] \tag{10.4}$$

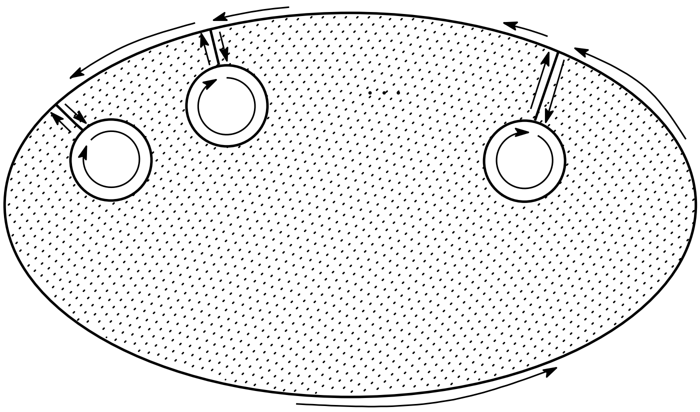


証明

- 点 α_j を中心として，半径が十分小さな円 C_j を互いに他の外部にあり，全て C の内部にあるようにとる．
- 各 C_j と C を結ぶ曲線 Γ_j をとる（ただし Γ_j は共有点をもたないとする）．



- 図の矢印のようにたどる曲線を $\tilde{C}$ とすると，その曲線とそれにより囲まれた部分で $f(z)$ は正則であるので



$$\int_{\tilde{C}} f(z)dz = 0$$

が成り立つ．

- 命題 2.1 と同様にして

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \cdots + \int_{C_p} f(z)dz \tag{10.5}$$

ここで留数の定義から

$$\int_{C_j} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}[f, \alpha_j]$$

であるからこれらを (10.5) に代入して (10.4) が得られる．□

留数と Laurent 展開

- $f(z)$ を $z=\alpha$ で Laurent 展開するとある $R>0$ が存在して

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\alpha)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-\alpha)^n}$$

が $0<|z-\alpha|<R$ で成り立つ．ここで c_n は

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta$$

である．ただし C_r は中心 α，半径 $r\in(0,R)$ である．$n=-1$ のときこれは留数 $\mathrm{Res}[f,\alpha]$ に一致する：

$$\boldsymbol{c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}f(\zeta)d\zeta=\mathrm{Res}[f,a]}$$

極における留数

- 次に α が k 位の極であるとき，$\mathrm{Res}[f,\alpha]$ を求めよう．
- $f(z)$ を $z=\alpha$ で Laurent 展開するとある $R>0$ が存在して

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\alpha)^n+\sum_{n=1}^{k}\frac{c_{-n}}{(z-\alpha)^n}\quad(c_{-k}\neq 0)$$

が $0<|z-\alpha|<R$ で成り立つ．

- このとき $g(z)=(z-\alpha)^kf(z)$ とおくと，

$$\begin{aligned}g(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\alpha)^{n+k}+\sum_{n=1}^{k}c_{-n}(z-\alpha)^{k-n}\\&=\sum_{n=k}^{\infty}c_{n-k}(z-\alpha)^n+\sum_{n=0}^{k-1}c_{n-k}(z-\alpha)^n\end{aligned}$$

であるので $g(\alpha)=c_{-k}$ と定義すれば g は $U_R(\alpha)$ で正則となる．したがって C を α を中心とする半径が十分小さい円とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f,\alpha]&=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{g(z)}{(z-\alpha)^k}dz\\&=\frac{1}{(k-1)!}\frac{(k-1)!}{2\pi i}\int_C\frac{g(z)}{(z-\alpha)^k}dz\\&=\frac{1}{(k-1)!}g^{(k-1)}(\alpha)\quad\text{（Cauchy の積分公式（微分形））}\end{aligned}$$

が得られる．つまり $\boldsymbol{\alpha}$ **が** $\boldsymbol{k}$ **位の極ならば**

$$\mathbf{Res}[\boldsymbol{f},\boldsymbol{\alpha}] = \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})!}\frac{\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}}{\boldsymbol{dz}^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}}[(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})]\bigg|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{\alpha}} \tag{10.6}$$

が成り立つ．

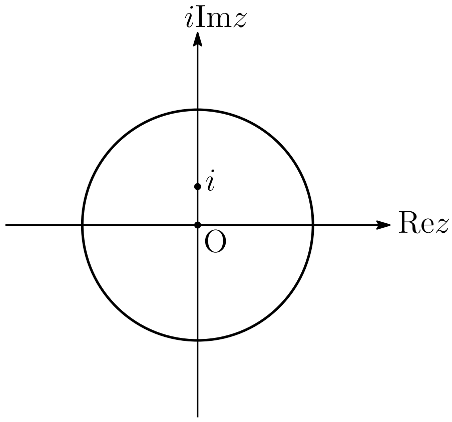
例題 1

$f(z)$ が $C := \{z \ : \ |z| = 3\}$ の周およびその内部で正則であるとき

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2(z-i)}dz$$

の値を求めよ．

解



- $F(z) = \dfrac{f(z)}{z^2(z-i)}$ とおくと，$F(z)$ は C の周およびその内部のうち，C の内部の $z = 0,\, i$ 以外で正則である．
- よって留数定理により

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2(z-i)}dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}[F,0] + \mathrm{Res}[F,i]\right)$$

  が成り立つ．
- $\mathrm{Res}[F,0]$ について，$g_0(z) = f(z)/(z-i)$，C_0 を原点中心，半径が十分小さな円とすると，g_0 は C_0 の周およびその内部で正則であるから，Cauchy の積分公式により

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[F,0] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(z)}{z^2(z-i)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{g_0(z)}{z^2}dz \\ &= \frac{(2-1)!}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{g_0(z)}{z^2}dz \\ &= g_0'(0) = \left(\frac{f(z)}{z-i}\right)'\bigg|_{z=0} = if'(0) + f(0)\end{aligned}$$

- $\mathrm{Res}[F, i]$ について，$g_1(z) = f(z)/z^2$, C_1 を i 中心で半径が十分小さい円とすると $g_1(z)$ は C_1 の周およびその内部で正則より Cauchy の積分公式より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}[F, i] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{z^2(z-i)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{g_1(z)}{z-i}dz \\
&= g_1(i) = -f(i)
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\int_C \frac{f(z)}{z^2(z-i)}dz = 2\pi i \left\{ if'(0) + f(0) - f(i) \right\}
$$

注 $f(z)$ が具体的に与えられていないので $z = 0, i$ が何位の極かが決定できない．そのため公式を使うのを避けた（$f(0) = 0$, $f(i) = 0$ か否かによる）．

例題２

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$ であることを複素積分を用いて証明せよ．

指針 $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ に注意し，$\dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)}$ の単位円周 $C : z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 上の積分とする．

$\boxed{\textbf{解}}$

- $C : z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 上では

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad dz = ie^{i\theta}d\theta, \quad d\theta = \frac{1}{iz}dz$$

より

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = \int_C \frac{1}{2+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{1}{iz}dz = \int_C \frac{2}{z^2+4iz-1}dz$$

- ここで，関数 $\dfrac{2}{z^2+4iz-1}$ は $z^2+4iz-1=0$ となる z 以外で正則である．$z^2+4iz-1=0$ を解くと

$$z^2+4iz+4i^2 = 1+4i^2, \quad (z+2i)^2 = -3, \quad z = (-2\pm\sqrt{3})i$$

このうち，C の内部にあるのは $z=(-2+\sqrt{3})i$ である．

- まとめると $\dfrac{2}{z^2+4iz-1}$ は C の周およびその内部のうち，C の内部の点 $z=(-2+\sqrt{3})i$ を除いて正則である．

$$\frac{2}{z^2+4iz-1} = \frac{2}{\{z-(-2+\sqrt{3})i\}\{z-(-2-\sqrt{3})i\}}$$

より

$$h(z) = \frac{2}{z-(-2-\sqrt{3})i}$$

とおけば $h(z)$ は C の周およびその内部で正則であるから Cauchy の積分公式から

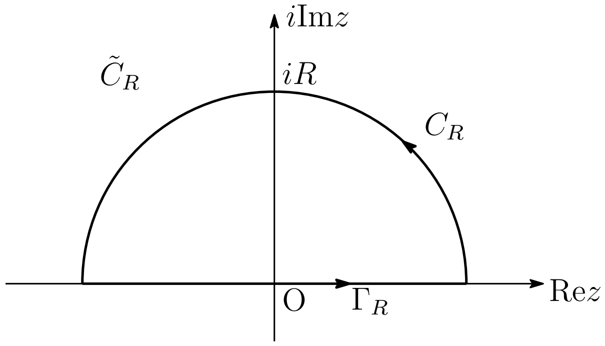
$$\begin{aligned}\int_C \frac{2}{z^2+4iz-1}dz &= \int_C \frac{h(z)}{z-(-2+\sqrt{3})i}dz \\ &= 2\pi i h((-2+\sqrt{3})i) = 2\pi i\frac{2}{2\sqrt{3}i} = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi\end{aligned}$$

例題３

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ を複素積分を用いて示せ．

$\boxed{\textbf{解}}$

- 実軸上の $-R$ と R を結ぶ線分 Γ_R と原点中心，半径 R の円の上半平面にある部分 C_R を結んでできる曲線を $\tilde{C}_R$ とする．



$$\tilde{C}_R = \Gamma_R + C_R$$

このとき

$$\int_{\tilde{C}_R} \frac{dz}{z^4+1} = \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} \tag{10.7}$$

- 次に関数 $f(z) := \dfrac{1}{z^4+1}$ は $z^4+1=0$ となる z を除いて正則である．$z^4+1=0$ となる z は

$$z = e^{\frac{\pi}{4}i},\ e^{\frac{3}{4}\pi i},\ e^{\frac{5}{4}\pi i},\ e^{\frac{7}{4}\pi i}$$

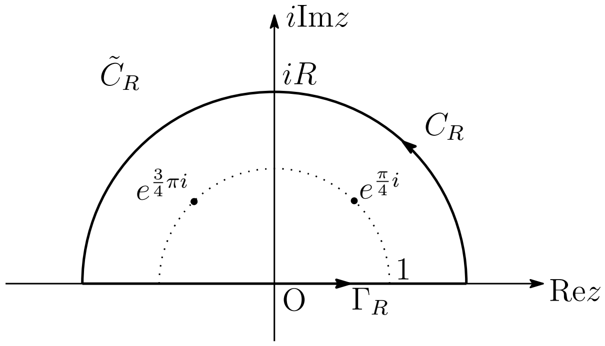
であり，

$$f(z) = \frac{1}{(z-e^{\frac{\pi}{4}i})(z-e^{\frac{3}{4}\pi i})(z-e^{\frac{5}{4}\pi i})(z-e^{\frac{7}{4}\pi i})}$$

と表されるので，特異点は全て1位の極である．

- このうち，上半平面にあるのは $e^{\frac{\pi}{4}i}, e^{\frac{3}{4}\pi i}$ であり，それぞれ絶対値は1であるから，$R>1$ のとき，留数定理より

$$\int_{\tilde{C}_R} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left(\mathrm{Res}[f, e^{\frac{\pi}{4}i}] + \mathrm{Res}[f, e^{\frac{3}{4}\pi i}]\right) \tag{10.8}$$



- $\mathrm{Res}[f, e^{\frac{\pi}{4}i}]$ について，$e^{\frac{\pi}{4}i}$ は 1 位の極だから (10.6) より

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f, e^{\frac{\pi}{4}i}] &= \lim_{z \to e^{\frac{\pi}{4}i}} (z - e^{\frac{\pi}{4}i}) f(z) \\ &= \lim_{z \to e^{\frac{\pi}{4}i}} \frac{z - e^{\frac{\pi}{4}i}}{z^4 + 1 - 0} = \lim_{z \to e^{\frac{\pi}{4}i}} \frac{1}{\dfrac{z^4 + 1 - 0}{z - e^{\frac{\pi}{4}i}}} \\ &= \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z = e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{1}{4e^{\frac{3}{4}\pi i}} = -\frac{1}{4} e^{\frac{\pi}{4}i}\end{aligned}$$

- 同様にして

$$\mathrm{Res}[f, e^{\frac{3}{4}\pi i}] = \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z = e^{\frac{3}{4}\pi i}} = -\frac{1}{4} e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

- よって (10.8) より

$$\int_{\tilde{C}_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i \left(-\frac{1}{4} e^{\frac{\pi}{4}i} - \frac{1}{4} e^{\frac{3}{4}\pi i} \right) = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \tag{10.9}$$

- 次の Γ_R は $\Gamma_R : z = x \ (-R \le x \le R)$ と表されるから

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4 + 1} \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} \quad (\text{as } R \to \infty)$$

- C_R は $C_R : z = Re^{i\theta} \ (0 \le \theta \le \pi)$ と表されるから

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{R^4 e^{4i\theta} + 1} d\theta$$

である．ここで $|R^4 e^{4i\theta} + 1| = |R^4 e^{4i\theta} - (-1)| \ge |R^4 e^{4i\theta}| - |-1| = R^4 - 1$ であるから

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^4 + 1} \right| \le \int_0^{\pi} \frac{|iRe^{i\theta}|}{|R^4 e^{4i\theta} + 1|} d\theta \le \int_0^{\pi} \frac{R}{R^4 - 1} d\theta = \frac{R\pi}{R^4 - 1} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

- よって (10.7) で $R \to \infty$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

11　一致の定理・最大値原理

11.1　正則関数の零点

- 関数 $f(z)$ に対して $f(a)=0$ となる点 a を $f(z)$ の**零点**という．

命題 11.1

関数 $f(z)$ が領域 D で正則で，D の一点 a において $f^{(n)}(a)=0\ (n=0,1,2,\cdots)$ を満たすならば D で $f(z)\equiv 0$ が成り立つ．

証明 **Step 1:**

- $U_r(a)\subset D$ なる r をとると Taylor の定理（定理 8.1）より

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \quad (z\in U_r(a))$$

が成り立つが，仮定「$f^{(n)}(a)=0\ (n=0,1,2,\cdots)$」より

$$f(z)\equiv 0 \ \text{ in } \ U_r(a)$$

が成り立つ．したがって任意の $z\in U_r(a)$ に対し

$$f^{(n)}(z)=0 \ \ (n=0,1,2,\cdots)$$

である．

Step 2: 任意の $b\in D$ に対し $f(b)=0$ を示す．

- そのために

$$A=\{z\in D \ : \ f^{(n)}(z)=0 \ \ (n=0,1,2,\cdots)\}$$

とおく．仮定から $a\in A$ である．

- 任意に $b\in D$ をとり，固定する．D は領域であるから a と b は D 内の連続曲線 C で結べる：

$$\begin{aligned}&C: z=z(t) \ \ (t\in[\alpha,\beta])\\&z(\alpha)=a,\ z(\beta)=b,\ \ z(t) \text{ は連続関数}\end{aligned}$$

- T を次のようにおく：

$$T=\{t\in[\alpha,\beta] \ : \ \alpha\le {}^{\forall}\tau\le t \text{ に対して } z(\tau)\in A\}$$

$\alpha\in T$ である．また T の定義から任意の $t\in T$ に対して $t\le\beta$ より T は上に有界である．

- $t_0 = \sup T$ とおく．このとき任意の $t_1 < t_0$ に対して sup の定義より $t_1 \le t < t_0$ なる $t \in T$ が存在する．よって T の定義から $z(t_1) \in A$

- まとめると，任意の $t_1 \in [0, t_0)$ に対して $f^{(n)}(z(t_1)) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ である．$f^{(n)}(z)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, $z(t)$ は連続であるので

$$\lim_{t \to t_0 - 0} f^{(n)}(z(t)) = 0$$

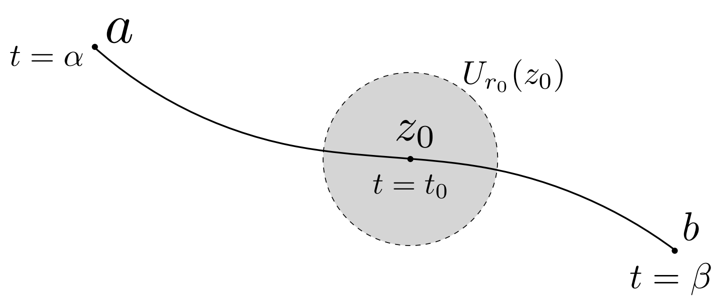
  つまり

$$f^{(n)}(z(t_0)) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

  が成り立つ．つまり $z(t_0) \in A$ である．

- $t_0 = \beta$ を証明したい．そのために $\boxed{t_0 < \beta}$ として矛盾を導く．$z_0 = z(t_0)$ とおく．

- $z_0 \in D$ より，ある $r_0 > 0$ が存在して $U_{r_0}(z_0) \subset D$ となるが，$f^{(n)}(z_0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ と Taylor の定理（定理 9.1）より $f(z) \equiv 0$ (in $U_{r_0}(z_0)$) が成り立つ．



- よって $z \in U_{r_0}(z_0)$ に対して

$$f^{(n)}(z) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

- したがって，ある $\varepsilon > 0$ が存在して $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset [\alpha, \beta]$ かつ，任意の $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ に対して

$$f^{(n)}(z(t)) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

  が成り立つ．これより $t_0 + \varepsilon/2 \in T$ となり $t_0 = \sup T$ に反する．

- 以上より $\sup T = \beta$ となり

$$f^{(n)}(b) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

  特に $f(b) = 0$ が成り立つ．□

零点の位数

- 命題 11.1 より次のことがわかる．

系 11.2

関数 $f(z)$ が領域 D で正則で，定数関数でないとする．このとき，ある $a \in D$ に対して $f(a) = 0$ ならば

$$f(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

を満たす $n \in \mathbb{N}$ がただ一つ定まる．

- 上の系 11.2 で定まる n を $f(z)$ の零点 a の**位数**といい，また a は $f(z)$ の $\boldsymbol{n}$ **位の零点**という．

零点の孤立性

- $f(z)$ は a で正則（つまり，ある $r > 0$ が存在して $f(z)$ は $U_r(a)$ で正則）とする．また，$f(z)$ が定数関数でないとする．a が $f(z)$ の n 位の零点であるならば Taylor の定理より

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

が成り立つ．これより

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^n \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-a)^{k-n} \\ &= (z-a)^n \{c_n + c_{n+1}(z-a) + \cdots\} \end{aligned}$$

- ここで $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-a)^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+n}(z-a)^k$ とおくと $g(z)$ は $U_r(a)$ で正則である．実際，$g(z)$ は $z = a$ で収束することは明らか．$0 < |z-a| < r$ では $g(z)$ は $(z-a)^{-n} f(z)$ に収束する．よって $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+n}(z-a)^k$ は $U_r(a)$ で収束する．よって定理 7.5 より $g(z)$ は $U_r(a)$ で正則である．

- a は $f(z)$ の n 位の零点だから $f^{(n)}(a) = n! c_n \neq 0$ つまり $g(a) \neq 0$ である．$g(z)$ は $U_r(a)$ で正則であるから連続である．よって，ある $r_1 \in (0, r]$ が存在して $g(z) \neq 0$ $(z \in U_{r_1}(a))$ が成り立つ．

- $f(z) = (z-a)^n g(z)$ であるので

$$0 < |z-a| < r_1 \quad \Rightarrow \quad f(z) \neq 0$$

が成り立つ．

- 以上より次のことが証明された．

命題 11.3

$f(z)$ は領域 D で正則であるとし，定数関数でないとする．このとき，ある $a \in D$ で $f(a)=0$ ならば，ある $r>0$ が存在して

$$0<|z-a|<r \quad \Rightarrow \quad f(z) \neq 0$$

が成り立つ．つまり定数関数でない正則関数 $f(z)$ の零点は孤立している．

11.2 一致の定理

以上で次の**一致の定理**を証明する準備ができた．

定理 11.4（一致の定理）

$f(z), g(z)$ は領域 D で正則，$a \in D$ とし，D 内の点列 $\{z_n\}$ は

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a, \quad z_n \neq a, \quad f(z_n)=g(z_n) \quad (n=1,2,\cdots)$$

を満たすとする．このとき $f(z) \equiv g(z)$ (in D) が成り立つ．

証明

- $F(z)=f(z)-g(z)$ とおくと $F(z)$ は D で正則である．$\{z_n\}$ を条件を満たす点列とすると

$$F(z_n)=f(z_n)-g(z_n)=0$$

- $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ で $F(z)$ は $z=a$ で連続であるから

$$F(a)=\lim_{n\to\infty} F(z_n)=0$$

  である．

- $F \not\equiv 0$ とすると命題 11.3 より，ある $r>0$ が存在して $U_r(a) \subset D$ かつ

$$0<|z-a|<r \quad \Rightarrow \quad F(z) \neq 0 \tag{11.1}$$

  が成り立つ．

- 一方，$\lim_{n\to\infty} z_n = a$ より，上の r に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |z_n - a| < r$$

  が成り立つ．$z_n \neq a$ より $0<|z_n-a|<r$ である．$F(z_n)=0$ であるのでこれは (11.1) に反する．

- 以上より $F(z) \equiv 0$ つまり $f(z) \equiv g(z)$ が D で成り立つ．□

$\boxed{\textbf{注}}$

(1) 一致の定理によれは，D で正則な関数 $f(z)$ と $g(z)$ が集積点をもつ可算無限個の点からなる集合上で等しければ $f(z)$ と $g(z)$ は D 全体で一致するという正則関数の顕著な性質である．このことは次のように使われることもある．

- C を D 内の曲線で $f(z) = g(z)$ $(z \in C)$ ならば $f(z) \equiv g(z)$ in D
- $f(z) = g(z)$ $(z \in U_r(a) \subset D)$ ならば $f(z) \equiv g(z)$ in D

(2) 命題 11.1 は実数変数，実数値関数に対しては成り立たない．例えば

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

とすると $f^{(n)}(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示すことができる．しかし明らかに $f(x) \not\equiv 0$ である．

一致の定理の応用例（三角関数の加法定理）

- $z \in \mathbb{C}$ を変数とする．$\sin z$, $\cos z$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則である．このとき

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w \tag{11.2}$$

が任意の $\underline{z,\, w \in \mathbb{C}}$ に対して成り立つことを一致の定理を用いて示そう．

- まず $\underline{x,\, y \in \mathbb{R}}$ のときは

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{11.3}$$

が成り立つことに注意する．

- $a \in \mathbb{R}$ を任意に固定して

$$\sin(z + a) = \sin z \cos a + \cos z \sin a \quad ({}^{\forall} z \in \mathbb{C})$$

を示そう．

- $f(z) = \sin(z + a)$, $g(z) = \sin z \cos a + \cos z \sin a = (\cos a) \sin z + (\sin a) \cos z$ とおくと $f(z)$, $g(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則であり，$z = x \in \mathbb{R}$ のときは (11.3) より

$$f(x) = g(x)$$

である．つまり実軸上 $f(z) \equiv g(z)$ である．

- ここまでをまとめると，任意の $z \in \mathbb{C}$ と任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\sin(z + x) = \sin z \cos x + \cos z \sin x \tag{11.4}$$

が成り立つ．

- 次に $z \in \mathbb{C}$ を任意に固定し

$$
\begin{aligned}
f(w) &= \sin(z+w) \\
g(w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w
\end{aligned}
$$

とおくと $f(w)$, $g(w)$ は $\mathbb{C}$ で正則で (11.4) より，実軸上 $f(w) \equiv g(w)$ が成り立つ．

- 一致の定理より

$$
f(w) \equiv g(w) \quad \text{in} \quad \mathbb{C}
$$

が成り立つ．$z \in \mathbb{C}$ は任意だったので (11.2) が成り立つ．

11.3　最大値原理

補題 11.5

関数 $f(z)$ は領域 D で正則で $|f(z)|$ が定数関数ならば $f(z)$ も定数関数である．

証明は「補足」で行う．

定理 11.6（最大値原理）

関数 $f(z)$ は領域 D で正則とする．$|f(z)|$ がある $a \in D$ で最大値をとれば $f(z)$ は定数関数である．

証明

- $|f(z)|$ は D 上 $z=a$ で最大値 M をとるとする：

$$
|f(a)| = M, \quad |f(z)| \leq M \quad (z \in D)
$$

- $a \in D$ よりある $r_0 > 0$ が存在して $0 < r < r_0$ ならば $U_r(a) \subset D$ である．特に，中心 a，半径 r の円 C_r は D に含まれる．

- Cauchy の積分公式により

$$
f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (0 < r < r_0)
$$

- C_r は $C_r : z = a + re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ とパラメータ表示できるので

$$
f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta}) d\theta
$$

- よって $|f(z)| \leq M$ より

$$
\begin{aligned}
M = |f(a)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta = M
\end{aligned}
$$

よって $\displaystyle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta = M \ (0 < r < r_0)$ が成り立つ．

- これより

$$
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{M - |f(a + re^{i\theta})|\} d\theta = 0
$$

であるが，$M - |f(a + re^{i\theta})|$ は非負の関数で連続であるので

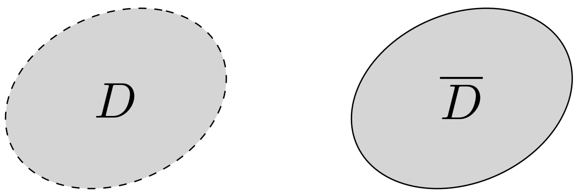
$$
M - |f(a + re^{i\theta})| = 0 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 < r < r_0)
$$

したがって $|f(z)| \equiv M$ (in $U_{r_0}(a)$) が成り立つ．

- 補題 11.5 より $f(z)$ は $U_{r_0}(a)$ 上定数関数である．さらに一致の定理（定理 11.4）より $f(z)$ は D 上定数関数である．□

系 11.7

関数 $f(z)$ は有界領域 D で正則で，$\overline{D}$ で連続であるとする．$f(z)$ が定数関数でなければ $|f(z)|$ の最大値は D の境界上でとる．



11.4　補足（補題 11.5）の証明

- $|f(z)|$ を定数関数とする．
- $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ （$z = x + iy$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ は実数値関数）とおく．
- $|f(z)|^2 = u(x, u)^2 + v(x, y)^2$ なので $u^2 + v^2 = A$ （A ：定数）と仮定する．$A = 0$ ならば $u(x, y) \equiv v(x, y) \equiv 0$ であるので $f(z) \equiv 0$ となるので定数関数である．

- $A > 0$ と仮定する．$u^2 + v^2 = A$ の両辺を x, y で偏微分すると

$$
\begin{aligned}
2uu_x + 2vv_x &= 0 \\
2uu_y + 2vvy &= 0
\end{aligned}
$$

  したがって

$$
\begin{aligned}
uu_x + vv_x &= 0 \\
uu_y + vv_y &= 0
\end{aligned}
$$

  これより

$$
\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.5}
$$

- 今，$u(x,y)^2 + v(x,y)^2 \neq 0$ がすべての (x,y) に対して成り立っているので，u, v についての連立方程式 (11.5) はすべての (x,y) に対して非自明な解をもつ．

- したがって

$$
\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y \equiv 0 \tag{11.6}
$$

- $f(z)$ は正則より Cauchy-Riemann の関係式

$$
\begin{aligned}
u_x &= v_y \quad (v_y = u_x) \\
u_y &= -v_x
\end{aligned}
$$

  が成り立つのでこれを (11.6) に代入すると

$$
u_x^2 + v_x^2 \equiv 0
$$

  これより

$$
u_x \equiv v_x \equiv 0
$$

  が成り立つ．

- $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) \equiv 0$ であるので $f(z)$ は定数関数である．□

12　偏角の原理

- 領域 D で定義された関数 $f(z)$ に対して D における特異点が極のみであるとき $f(z)$ は**有理型**であるという．
- $f(z)$ の D 内の零点を $a_1, \cdots, a_k$ とし，その位数を $n_1, \cdots, n_k$ とするとき，

$$N = n_1 + \cdots + n_k$$

とおく．

- $f(z)$ の D 内の極を $b_1, \cdots, b_l$ とし，その位数を $p_1, \cdots, p_l$ とするとき

$$P = p_1 + \cdots + p_k$$

とおく．

定理 12.1（偏角の原理）

$f(z)$ は領域 D で有理型とし，D 内の単純閉曲線 C 上に $f(z)$ の零点も極もないものとする．このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$$

が成り立つ．

解

- $F(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ とおく．C 内の $F(z)$ の孤立特異点は $f(z)$ の零点 $a_1, \cdots, a_k$ と極 $b_1, \cdots, b_l$ のみである．したがって留数定理より

$$\int_C F(z)dz = 2\pi i \left\{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}[F, a_i] + \sum_{j=1}^{l} \mathrm{Res}[F, b_j]\right\}$$

である．

- a が $f(z)$ の n 位の零点であるとき

$$f(z) = g(z)(z-a)^n \quad (g(z) \text{ は } a \text{ で正則，} g(a) \neq 0)$$

と表される．このとき $f'(z) = g'(z)(z-a)^n + ng(z)(z-a)^{n-1}$ であるから $F(z)$ は a の近傍で

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)(z-a)^n + ng(z)(z-a)^{n-1}}{g(z)(z-a)^n} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{n}{z-a}$$

である．

- $g(z)$ は a で正則で $g(a) \neq 0$ より C_r を a を中心とする半径が十分小さな円とすると $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ は C_r の周およびその内部で正則である．よって Cauchy の積分定理により $\displaystyle\int_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz = 0$ である．したがって留数の定義から

$$\mathrm{Res}[F, a] = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left\{\frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{n}{z-a}\right\} dz = n$$

である．したがって a_i の位数を n_i とすれば

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}[F, a_i] = \sum_{i=1}^{k} n_i = N$$

を得る．

- b が $f(z)$ の p 位の極であるとき

$$f(z) = h(z)(z-a)^{-p} \quad (h(z) \text{ は } b \text{ で正則, } h(b) \neq 0)$$

と表される．このとき $f'(z) = h'(z)(z-a)^{-p} - ph(z)(z-a)^{-p-1}$ であるから $F(z)$ は b の近傍で

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h'(z)(z-a)^{-p} - ph(z)(z-a)^{-p-1}}{h(z)(z-a)^{-p}} = \frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{p}{z-a}$$

である．

- $h(z)$ は b で正則で $h(b) \neq 0$ より C_r を b を中心とする半径が十分小さな円とすると $\dfrac{h'(z)}{h(z)}$ は C_r の周およびその内部で正則である．よって Cauchy の積分定理により $\displaystyle\int_C \frac{h'(z)}{h(z)}dz = 0$ である．したがって留数の定義から

$$\mathrm{Res}[F, b] = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left\{\frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{p}{z-a}\right\} dz = -p$$

である．したがって b_j の位数を p_j とすれば

$$\sum_{j=1}^{l} \mathrm{Res}[F, b_j] = -\sum_{j=1}^{l} p_j = -P$$

を得る．□

注 f が D で正則であるとき，C を D 内の単純閉曲線で C の内部は D の点のみからなるとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N$$

つまり，C の内部にある零点の個数を位数を重複して数えたものである．

- 偏角の原理の意味を考えよう．

命題 12.2

$D \subset \mathbb{C}$ を領域，$a \in D$ とする C を D 内の区分的に滑らかな閉曲線で a を通らないものとする．このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z-a}$$

は整数である．

証明 滑らかな場合のみ示す．

- $C : z = z(t)\ (\alpha \leq t \leq \beta)$ とおくと C は閉曲線なので $z(\alpha) = z(\beta)$ であり

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_\alpha^\beta \frac{z'(t)}{z(t)-a}dt$$

である．

- $h(t) = \displaystyle\int_\alpha^t \frac{z'(s)}{z(s)-a}ds$ とおくと $h'(t) = \dfrac{z'(t)}{z(t)-a}$ が成り立つ．

- $g(t) = e^{-h(t)}(z(t)-a)$ とおくと g は微分可能で

$$g'(t) = -h'(t)e^{-h(t)}(z(t)-a) + e^{-h(t)}z'(t) = e^{-h(t)}\{z'(t) - h'(t)(z(t)-a)\} = 0$$

である．したがって g は定数関数である：$g(t) \equiv c$

- $h(\alpha) = 0$ であるから $g(\alpha) = z(\alpha) - a \neq 0$ である（$a \notin C$ であるため）．したがって

$$e^{h(t)} = \frac{z(t)-a}{z(\alpha)-a}$$

である．$t = \beta$ とすれば $z(\beta) = z(\alpha)$ であるから $e^{h(\beta)} = 1$ である．よって

$$\int_\alpha^\beta \frac{z'(t)}{z(t)-a}dt = h(\beta) = 2k\pi i \quad ({}^\exists k \in \mathbb{Z})$$

を得る．□

- この命題で登場した

$$n(C,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z-a}$$

を点 a に関する C の**回転数**という．

- $D \subset \mathbb{C}$ を領域とし，C を D 内の単純閉曲線とする．f は偏角の原理の条件を満たすとし，C の $w = f(z)$ による像を Γ とする，つまり，$C : z = z(t)$ $(\alpha \leq \beta)$ とするとき

$$\Gamma : w(t) = f(z(t)) \quad (\alpha \leq \beta)$$

とおく．

$\boxed{\textbf{注}}$ C 上には $f(z)$ の極はないので $f(z)$ は C を含むある開集合で正則である．C がコンパクトであることと $f'(z)$ の零点は孤立していることから C 上に $f'(z) = 0$ となる点は高々有限個しかないことがわかる．したがって Γ は区分的に滑らかである．

- このとき $w'(t) = f'(z(t))z'(t)$ であるから

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{f'(z(t))}{f(z(t))}z'(t)dt,$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{1}{f(z(t))}f'(z(t))z'(t)dt$$

である．したがって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = C(\Gamma, 0)$$

である．これは z が C を 1 周するとき $f(z)$ の偏角の増加量を表す．

定理 12.3(Rouché の定理)

$D \subset \mathbb{C}$ を領域，C を D の単純閉曲線で C の内部は D の点のみからなるとする．C 上で $|f(z)| > |g(z)|$ であるとき C の内部の $f(z) + g(z)$ の零点の個数は C の内部の $f(z)$ の零点の個数に等しい．ただし，零点の個数は位数の数だけ重複して数えるものとする．

証明

- $F(z) = \dfrac{f(z) + g(z)}{f(z)} = 1 + \dfrac{g(z)}{f(z)}$ とおく．

- このとき

$$\frac{F'}{F} = \frac{f' + g'}{f + g} - \frac{f'}{f}$$

である．

- C 上で $|f(z)| > |g(z)|$ であるから

$$|F(z) - 1| = \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$$

である．したがって $F(z)$ による C の像 Γ は $U_1(1)=\{w\in\mathbb{C}:|w-1|<1\}$ に含まれる．したがって, $C(\Gamma,0)=0$ である（Γ は 0 のまわりを 1 回転もしない）．$f(z)$, $f(z)+g(z)$ は D で正則であるから偏角の原理の証明に続く $\boxed{\textbf{注}}$ より

$$
\begin{aligned}
0=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{F'(z)}{F(z)}dz&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz\\
&=[C\ \text{内の}\ f(z)+g(z)\ \text{の零点の重複を含めた個数}]\\
&\qquad-[C\ \text{内の}\ f(z)\ \text{の零点の重複を含めた個数}]
\end{aligned}
$$

を得る．□

$\boxed{\textbf{注}}$ $C(\Gamma,0)=0$ は Cauchy の積分公式（一般の閉曲線のバージョン）と思ってもよい.

索引