解析学の基礎
(実数の連続性から定積分の存在まで)

松澤　寛

1 実数の連続性の公理

- $\mathbb{R}$ を実数の集合とする．$\mathbb{R}$ は数直線と同一視される．実数の集合には大小と四則演算について次の公理を仮定している．

(I) $\mathbb{R}$ は体である．つまり 0 による除算を除いては四則演算が自由に行える（「体」について詳しくは「代数学」関係の講義や書物を参照）．

(II) $\mathbb{R}$ は次の順序関係をもつ

(1) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $a > b$, $a = b$, $a < b$ のいずれかが成り立つ．

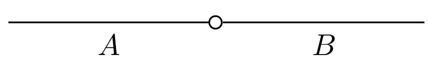
(2) $a > b$, $b > c$ ならば $a > c$ が成り立つ．

(III) $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して

(1) $a > b$ ならば $a + c > b + c$ が成り立つ．

(2) $a > b$, $c > 0$ ならば $ac > bc$ が成り立つ．

- この他に，解析学において極限を扱う際に重要になるのは「数直線には穴がない」という**実数の連続性の公理**である．数直線には穴がないということを数学的に表現しなければならない．その前にあくまで直感的なレベルであるが，数直線に穴があったらどうなるか考えてみよう．



- 数直線を「穴」を境にその穴より左にある $\mathbb{R}$ の元の集合 A とその穴より右にある $\mathbb{R}$ の元の集合 B に分けたとき，この A, B は

$$A, B \neq \emptyset, \quad A \cup B = \mathbb{R}, \quad a \in A \text{ かつ } b \in B \quad \Rightarrow \quad a < b \tag{1.1}$$

を満たす．(1.1) を満たす $\mathbb{R}$ の部分集合の組 (A, B) を $\mathbb{R}$ の **Dedekind の切断**あるいは単に**切断**という．

- もし，数直線に穴があれば，その穴を境に構成した切断 (A, B) は次を満たすと考えられる（あくまで直感的に）

A に最大元がなく　かつ　B に最小元がない

- この対偶を考えることにより，次のことを実数の連続性の公理として仮定する：

(IV) 実数の連続性の公理

$\mathbb{R}$ の任意の切断 (A, B) が与えられたとき，A に最大元があるか B に最小元があるかのいずれかが成り立つ．

これが「数直線には穴がない」ということの数学的な表現でありこれを仮定する．このことから解析学の全ての結果が導かれる．

注 A に最大元があり，かつ B に最小元が存在する $\mathbb{R}$ の切断は存在しない．実際，A の最大元を a，B の最小元を b とすると (1.1) より $a < b$ である．一方 $(a+b)/2$ は A にも B にも属さないので $A \cup B = \mathbb{R}$ に反する．

2 上限・下限

- 実数の連続性から解析学において頻繁に用いられる「上限・下限」という概念が得られる．

- $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ とする．ある実数 m が存在して

$$x \in M \quad \Rightarrow \quad x \leq m$$

  が成り立つとき集合 M は**上に有界**であるといい，m を集合 M の**上界**という．

- m が M の上界であれば $m' > m$ なる m' も再び M の上界である．上界としてはできるだけ小さいものが欲しい．そこで

$$\{m \in \mathbb{R} \ : \ m \text{ は } M \text{ の上界}\}$$

  とする．この集合に最小値 m_0 があるとき，m_0 を M の**上限**といい $m_0 = \mathbf{sup}\,\boldsymbol{M}$ と表す．

命題 0.1（上限の存在）

$M \subset \mathbb{R}$ は $M \neq \emptyset$ で上に有界とする．このとき M の上限が存在する．

証明

- M は空でなく，上に有界であるから $B = \{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ は } M \text{ の上界}\}$ は空でない．

- $A = \mathbb{R} \backslash B$ とする．このとき A も空でない．なぜなら M は空でないので $m \in M$ なる m が存在する．このとき $m - 1$ は M の上界ではない（上界なら $m \leq m - 1$ が成り立ってしまう！）ので $m - 1 \in A$ である．また A の定義から $A \cup B = \mathbb{R}$ が成り立つ．

- (A, B) が切断であることを示すために $a \in A, b \in B$ ならば $a < b$ であることを示す．実際 $a \in A, b \in B$ とすると $a \in A$ は M の上界ではないので $a < m$ となる $m \in M$ が存在する．また b は M の上界であるから $m \leq b$ が成り立つ．以上より $a < b$ が成り立つ．

- 以上で (A, B) が $\mathbb{R}$ の切断であることが示された．実数の連続性の公理より A に最大元があるか B に最小元があるかのいずれかである．前者が起こらないことを示せば良い．

- もし A に最大元 a が存在したとする．a は M の上界ではないので $a < m$ となる $m \in M$ が存在する．ここで $a < a' < m$ となる a' をとると a' は M の上界でないので $a' \in A$ である．これは a が A の最大元であることに反する．したがって A に最大元はなく B に最小元があることが示された．□

- M が上に有界でないとき $\sup M = \infty$ と書く．

- $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ とする．ある実数 m が存在して

$$x \in M \quad \Rightarrow \quad m \leq x$$

が成り立つとき集合 M は**下に有界**であるといい，m を集合 M の**下界**という．

- m が M の下界であれば $m' < m$ なる m' も再び M の下界である．下界としてはできるだけ大きいものが欲しい．そこで

$$\{m \in \mathbb{R} \ : \ m \text{ は } M \text{ の下界}\}$$

とする．この集合に最大値 m_0 があるとき，m_0 を M の**下限**といい $m_0 = \mathbf{inf}\, \boldsymbol{M}$ と表す．命題0.1の証明と同様にして空でない下に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合 M に対して M の下限が存在することが示される．M が下に有界でないとき $\inf M = -\infty$ と表す．

- 上限と下限の定義から次の特徴づけが成り立つことがすぐわかる：

命題 0.2（上限・下限の特徴づけ）

- $m_0 = \sup M$ であるための必要十分条件は
  (1) m_0 は M の上界
  (2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $m_0 - \varepsilon < m$ なる $m \in M$ が存在する．
- $m_0 = \inf M$ であるための必要十分条件は
  (1) m_0 は M の下界
  (2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $m < m_0 + \varepsilon$ なる $m \in M$ が存在する．

- $M \subset \mathbb{R}$ $(M \neq \emptyset)$ が上に有界でありかつ下に有界であるとき M は**有界**であるという．

- 上限・下限と集合の包含関係について次のことが成り立つ．

命題 0.3

A, $B \subset \mathbb{R}$ はともに空でなく $A \subset B$ であるとする．このとき $\sup A \leq \sup B$, $\inf B \leq \inf A$ が成り立つ．

注 両方とも上に有界でない場合，$\sup A = \sup B = \infty$ として等号が成立していると考える．inf についても同様．

証明

- sup についてのみ証明する．B が上に有界でないときは $\sup B = \infty$ であるから不等式は成り立つ．
- B は上に有界であるとする．このとき命題 0.1 より $b_0 = \sup B$ が存在する．
- $A \subset B$ であるから，任意の $a \in A$ に対し $a \in B$ より $a \leq b_0$ が成り立つ．つまり b_0 は A の 1 つの上界である．
- したがって A も上に有界であるが，$\sup A$ は A の上界のうち一番小さいものであるから $\sup A \leq b_0$ つまり $\sup A \leq \sup B$ が成り立つ．$\square$

3 Archimedes の原理・有理数の稠密性

ここでは，$a < b$ なる任意の実数 a, b に対して $a < q < b$ なる有理数 q が存在するという**有理数の稠密性**を証明する．まずは次の **Archimedes の原理**を紹介しよう．

命題 0.4（Archimedes の原理）

任意の $h > 0$ に対して集合 $\{nh \mid n \in \mathbb{N}\}$ は上に有界でない．

証明

- $M = \{nh \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおき，M が上に有界であるとする．命題0.1 より $m_0 = \sup M$ が存在する．
- 命題 0.2 より $\varepsilon = h$ とすると $m_0 - \varepsilon = m_0 - h < m$ となる $m \in M$ が存在するが M の定義により $m = nh$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する．つまり $m_0 - h < nh$ が成り立つ．
- これより $m_0 < (n+1)h$ である．$n + 1 \in \mathbb{N}$ であるので $(n+1)h \in M$ であり m_0 が M の上界であることに反する．$\square$

Archimedes の原理は $h = 1$ として次のように用いられることも多い：

任意の $K \geq 0$ に対して $n > K$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する．

有理数の稠密性を証明する前に，自然数の集合について次の結果を証明なしで述べる．

命題 0.5

$N \subset \mathbb{N}$, $N \neq \emptyset$ であれば N に最小元が存在する．

有理数の稠密性を証明しよう．

命題 0.6（有理数の稠密性）

$a < b$ なる任意の実数 a, b に対して $a < q < b$ なる有理数 q が存在する．

証明

- $a > 0$ とする．
- Archimedes の原理（命題 0.4）より $n(b-a) > 1$ なる $n \in \mathbb{N}$ が存在する．
- $\mathbb{N}$ の部分集合 N を $N = \{m \in \mathbb{N} \mid m > na + 1\}$ とおく．Archimedes の原理より N は空でない．命題 0.5 より N に最小元 m_0 が存在する（$m_0 \geq 2$ なる自然数であることに注意せよ）．
- この m_0 は $m_0 < nb+1$ を満たす．実際 $m_0 \geq nb+1$ とすると $m_0 - 1 \geq nb > na+1$ は成り立つ．$m_0 - 1 \geq 1$ であり m_0 が $m > na + 1$ を満たす最小の自然数であることに反する．したがって $na < m_0 - 1 < nb$ である．
- 両辺を $n(> 0$ に注意する$)$ で割れば $a < \dfrac{m_0 - 1}{n} < b$ であり $q = \dfrac{m_0 - 1}{n}$ が求める有理数である．
- $a \leq 0$ のときは Archimedes の原理より $a + L > 0$ なる自然数 L がとれる．このとき a, b のかわりに $a + L, b + L$ を考えることにより $a + L < q < b + L$ なる有理数 q が存在する．このとき $q - L$ が求める有理数となる．□

4 数列の極限

解析学における極限についての取り扱いは数列（点列）を用いて行われることが多い．ここではこれまでの準備を踏まえ，数列の極限について厳密な取り扱いを学ぶ．

- 実数列 $\{x_n\}$ が**上に有界**であるとは $\mathbb{R}$ の部分集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が上に有界であることをいう．下に有界，有界も同様に定義される．

定義

実数列 $\{x_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に**収束する**とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう．

命題 0.7

実数列 $\{x_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束しかつ $\beta \in \mathbb{R}$ に収束するとき $\alpha = \beta$ が成り立つ．

証明

- 任意に $\varepsilon > 0$ をとる.
- $\{x_n\}$ は α に収束するので，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- $\{x_n\}$ は β にも収束するので，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ とすると $n \geq n_2$ ならば $|x_n - \alpha| < \varepsilon/2$ かつ $|x_n - \beta| < \varepsilon/2$ が成り立つ．よって $n \geq n_2$ ならば

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - x_n| + |x_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

  が成り立つ．ここで $|\alpha - \beta| \geq 0$ で n に無関係であるので $|\alpha - \beta| = 0$ でなければならない．$\square$

- 実数列 $\{x_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとき α を数列 $\{x_n\}$ の**極限値**といい，$\alpha = \lim_{n \to \infty} x_n$ と表す.

命題 0.8

数列 $\{x_n\}$ は収束するならば有界である，つまりある $M > 0$ が存在して $|x_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つ.

証明

- 数列 $\{x_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとする．$\varepsilon = 1$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - \alpha| < 1$$

  が成り立つ.

- $|x_n - \alpha| \geq |x_n| - |\alpha|$ より $n \geq n_0$ ならば $|x_n| \leq |\alpha| + 1$ が成り立つ.
- よって $M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_{n_0-1}|, |\alpha| + 1\}$ とすれば $|x_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つ．$\square$

命題 0.9

数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta$$

を満たすならば

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \alpha + \beta$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \alpha\beta$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$

証明

(1) $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = \beta$ であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば

$$|x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．よって $n \geq n_0$ ならば

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (\alpha + \beta)| &\leq |(x_n - \alpha) + (y_n - \beta)| \\ &\leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \alpha + \beta$ が証明された．

(2)
- $\{y_n\}$ は収束するので，命題0.8より，ある $M > 0$ が存在して $|y_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つ．
- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = \beta$ であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば

$$|x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2M}, \ |y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}$$

  が成り立つ．
- よって $n \geq n_0$ ならば

$$\begin{aligned} |x_n y_n - \alpha\beta| &\leq |(x_n - \alpha) y_n + \alpha(y_n - \beta)| \\ &\leq |x_n - \alpha||y_n| + |\alpha||y_n - \beta| \\ &\leq |x_n - \alpha| M + |\alpha||y_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} M + \frac{\varepsilon|\alpha|}{2(|\alpha| + 1)} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \alpha\beta$ が証明された．

(3) • 次のことを示せばよい：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\beta}$$

• $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\lim_{n\to\infty} y_n = \beta$ であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば

$$|y_n - \beta| < \frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon$$

が成り立つ（$\beta \neq 0$ に注意）．

• 同様にして，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_1$ ならば

$$|y_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$$

が成り立つ．これより $n \geq n_1$ ならば

$$\begin{aligned} |y_n| &= |\beta + (y_n - \beta)| = |\beta - \{-(y_n - \beta)\}| \\ &\geq |\beta| - |y_n - \beta| > |\beta| - \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2} \end{aligned}$$

• よって $n \geq N := \max\{n_0, n_1\}$ ならば

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{\beta}\right| &= \frac{|\beta - y_n|}{|y_n||\beta|} = \left|\frac{y_n - \beta}{y_n\beta}\right| \\ &\leq \frac{|y_n - \beta|}{|y_n\beta|} < \frac{1}{\frac{|\beta|}{2}|\beta|} \cdot \frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\beta}$ が証明された．

• 実数列 $\{x_n\}$ が**正の無限大に発散する**とは任意の $K > 0$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n > K$$

が成り立つことである．同様に実数列 $\{x_n\}$ が**負の無限大に発散する**とは任意の $K > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n < -K$$

が成り立つことである．

- 実数列 $\{x_n\}$ について $x_n \leq x_{n+1}$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ に対してが成り立つとき $\{x_n\}$ は**単調増加**であるという．また，$x_n \geq x_{n+1}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つとき $\{x_n\}$ は**単調減少**であるという．$x_n < x_{n+1}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つとき $\{x_n\}$ は**狭義単調増加**ということもある．狭義単調減少についても同様である．

実数の連続性の公理から次の結果が得られる．

定理 0.10

数列 $\{x_n\}$ は上に有界で単調増加であるとする．このとき数列 $\{x_n\}$ は $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に収束する．また，下に有界で単調減少な数列は $\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に収束する．

証明

- 前半だけ示す．数列 $\{x_n\}$ は上に有界であるので $N = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおくと $\sup N$ が存在する．それを m_0 とおく．このとき $x_n \leq m_0$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．

- 任意の $\varepsilon > 0$ をとると上限の特徴づけ（命題 0.2）より $m_0 - \varepsilon < x < m_0$ なる $x \in N$ が存在する．

- $x \in N$ より $x = x_{n_0}$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ が成り立つ．つまり $m_0 - \varepsilon < x_{n_0} < m_0$ が成り立つ．

- $\{x_n\}$ は単調増加で $x_n \leq m_0$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つから

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad m_0 - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq m_0$$

　が成り立つ．これは $\{x_n\}$ が m_0 に収束することを意味する．□

例 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ が成り立つ．実際，Archimedes の原理より，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n_0\varepsilon > 1$ が成り立つ．したがって

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n\varepsilon \geq n_0\varepsilon > 1 \text{ つまり } 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

が成り立つ．これは $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を意味する．

例題 1

数列 $\{x_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ を満たすとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \alpha$ が成り立つことを証明せよ．

解

- $\alpha = 0$ の場合をまず証明する．

- $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ であるので，任意に $\varepsilon > 0$ をとると，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  が成り立つ．

- このとき $n \geq n_0$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0-1} + x_{n_0} + \cdots + x_n}{n}\right| &\leq \frac{|x_1| + \cdots + |x_{n_0-1}|}{n} + \frac{|x_{n_0}| + \cdots + |x_n|}{n} \\
&< \frac{|x_1| + \cdots + |x_{n_0-1}|}{n} + \frac{(n - n_0 + 1)\varepsilon}{2n} \\
&\leq \frac{|x_1| + \cdots + |x_{n_0-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

- $M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_{n_0-1}|\}$ とおくと，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ より，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{n_0}{n} M < \frac{\varepsilon}{2}$$

- したがって $n \geq \max\{n_1, n_0\}$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0-1} + x_{n_0} + \cdots + x_n}{n}\right| &< \frac{|x_1| + \cdots + |x_{n_0-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{n_0 M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

  これは $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 0$ を意味する．

- 次に $\alpha \neq 0$ のときを考える．$y_n = x_n - \alpha$ とすると $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ であるので，直前に示したことから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = 0$$

  が成り立つが，これを書き換えると

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{(x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) + \cdots + (x_n - \alpha)}{n} = 0 \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n\alpha}{n} = 0 \\
&\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - \alpha\right) = 0
\end{aligned}$$

  となる．これは $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \alpha$ を意味する．□

例題２

$x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ とするとき数列 $\{x_n\}$ は収束することを証明せよ．

解 数列 $\{x_n\}$ が単調増加で上に有界であることを示せばよい．

- まず単調増加であることを示そう．２項定理より

$$
\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-(k-1))}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

である．同様にして

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{(n+1)!} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\
&> 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&> 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = x_n
\end{aligned}
$$

よって単調増加である．

- 次に上に有界であることを示そう．$k \geq 2$ では $k! \geq 2^{k-1}$ であることに注意して

$$
\begin{aligned}
x_n &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&< 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3
\end{aligned}
$$

よって有界である．

- 以上より数列 $\{x_n\}$ は収束する．

4.1 区間縮小法の原理・Bolzano-Weierstrass の定理

ここでは，有界単調数列の収束に関する結果から区間縮小法と Bolzano-Weierstrass の定理を導く．いずれも実数の連続性から導かれる重要な性質であり，この後に述べる「実数の完備性」を導くのにも重要である．

定理 0.11（区間縮小法の原理）

有界閉区間の列 $I_n = [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が単調減少であるとする，つまり $I_1 \supset I_2 \supset \cdots I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$ が成り立つとする．このとき

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n (= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I_n \quad (n = 1, 2, \cdots)\}) \neq \emptyset$$

である．特に $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ならば，ある $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\alpha\}$$

が成り立つ．

注 開区間であると定理は成り立たない．実際 $I_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ とすると $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ である．

証明

- I_n が単調減少であるから，数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は次を満たす：

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

- よって $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列，$\{b_n\}$ は下に有界な単調減少数列である．したがって定理 0.10 より $\{a_n\}, \{b_n\}$ は収束する：$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ である．ここで

$$\alpha = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}, \quad \beta = \inf\{b_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

である．

- よって $a_n \leq \alpha$, $\beta \leq b_n$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．つまり $[\alpha, \beta] \subset I_n$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．以上より $[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ であり $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$

- $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ であるから $\beta = \alpha$ が成り立つ．このとき上で示したことから $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \supset \{\alpha\}$ である．

- $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ とおくと，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $c \in [a_n, b_n]$ であるから $a_n \leq c \leq b_n$ が成り立つ．$n \to \infty$ とすれば $c = \alpha(= \beta)$ が成り立つ．よって $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\alpha\}$ が成り立つ．

数列がいかなる実数にも収束しない場合でも，いわゆる「部分列」というものを考えると収束することがある．例を見てみよう．

例 $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ とおく．数列 $\{x_n\}$ は収束しないが $x_{2n} = \dfrac{2n}{2n+1} \to 1$ となる．数列 $\{x_{2n}\}$ は $\{x_n\}$ から n が偶数となるものを順に選んでできる数列であり，$\{x_n\}$ の部分列である．

数列 $\{x_n\}$ は n に $1, 2, \cdots$ と順に自然数を代入して並べることにより得られる数列である．このことを強調するために数列 $\{x_n\}$ は $\{x_n\}_n$ あるいは $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書かれることもある．この記法を踏まえて部分列を定義しよう．

$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$ かつ $\lim_{k \to \infty} n_k = \infty$ となる自然数の数列 $\{n_k\}_k$ に対して数列 $\{x_{n_k}\}_k$ を $\{x_n\}_n$ の**部分列**という：

$$x_{n_1}, \quad x_{n_2}, \quad \cdots, \quad x_{n_k}, \quad x_{n_{k+1}}, \quad \cdots$$

先の例では $n_k = 2k$ である．

部分列について次の定理が成り立つ．

定理 0.12（Bolzano-Weierstrass の定理）

数列 $\{x_n\}$ は有界であるとする．このとき，$\{x_n\}$ の部分列で，ある実数に収束するものが存在する．

注 $\{x_n\}$ の部分列のうち，収束するものを数列 $\{x_n\}$ の**収束部分列**という．

証明

- $\{x_n\}$ は有界であるから，ある $M > 0$ が存在して $|x_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つ．

- 有界閉区間 $[-M, M]$ を 2 つの有界閉区間 $[-M, 0]$ と $[0, M]$ に分割する．このうち少なくとも一方には数列 $\{x_n\}$ の項が無限個存在する．それを I_1 とする．(両方の場合は左側と決めておく）．

- 有界閉区間 I_1 を同様に 2 つの有界閉区間に等分すると，その少なくとも一方に数列 $\{x_n\}$ の項が無限個存在する．その区間を I_2 とする．

- 以下同様に $I_{k-1} \supset I_k$ なる有界閉区間の列 $\{I_k\}$ で I_k には数列 $\{x_n\}$ の項が無限個存在するようなものを構成することができる．

- さらに I_k の長さは $\dfrac{2M}{2^k} = \dfrac{M}{2^{k-1}} \to 0$ $(k \to \infty)$ である．

- したがって区間縮小法の原理（定理 0.11）より，ある $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{\alpha\}$$

が成り立つ．

- 次に部分列を構成しよう．まず I_1 には数列 $\{x_n\}$ の項が無限個あるので，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $x_{n_1} \in I_1$ が成り立つ．

- I_2 にも数列 $\{x_n\}$ の項が無限個あるので $n_2 > n_1$ なる $n_2 \in \mathbb{N}$ が存在して $x_{n_2} \in I_2$ が成り立つ．

- 以下同様に $x_{n_k} \in I_k$ $(n_k > n_{k-1},\ n_k \in \mathbb{N})$ なる n_k が存在する．

- このように構成した部分列 $\{x_{n_k}\}_k$ が α に収束することを示そう．任意に $\varepsilon > 0$ をとると，ある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $k \geq k_0$ ならば $\dfrac{M}{2^{k-1}} < \varepsilon$ が成り立つ．x_{n_k}，$\alpha \in I_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ より $k \geq k_0$ ならば

$$|x_{n_k} - \alpha| \leq \frac{M}{2^{k-1}} < \varepsilon$$

が成り立つ．これは $\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$ を意味する．□

注 数列 $\{x_n\}$ の収束部分列の極限値をその数列の**集積値**という．$\alpha \in \mathbb{R}$ が数列 $\{x_n\}$ の集積値であるための必要十分条件は任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ に数列 $\{x_n\}$ の項が無限個存在することである．

例題３

数列 $\{x_n\}$ が有界で，任意の収束部分列がすべて同じ極限値 α をもてば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ が成り立つことを証明せよ．

解

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ の定義は以下の通りであった：任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．

- このことを背理法で証明する．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ でない，つまり，ある $\varepsilon_0 > 0$ があって，

$$\text{任意の } k \in \mathbb{N} \text{ に対して } |x_{k'} - \alpha| \geq \varepsilon_0 \text{ なる } k' \geq k \text{ が取れる．} \tag{4.1}$$

が成り立つと仮定する．

- $k=1$ に対して (4.1) を満たす $k'(\geq 1)$ を 1 つとり $n(1)$ とする．
- $k=n(1)+1$ に対して (4.1) を満たす $k'(\geq n(1)+1)$ を 1 つとり $n(2)$ とする．
- $k=n(2)+1$ に対して (4.1) を満たす $k'(\geq n(2)+1)$ を 1 つとり $n(3)$ とする．
- 以下同様にして $n(k)>n(k-1)$ であり

$$|x_{n(k)}-\alpha| \geq \varepsilon_0 \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{4.2}$$

  を満たす $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n(k)}\}$ が構成できる．
- 一方 $\{x_n\}$ は有界だからその部分列 $\{x_{n(k)}\}$ も有界である．したがって Bolzano-Weierstrass の定理（定理 0.12）により $\{x_{n(k)}\}$ の収束部分列 $\{x_{n(n_k)}\}$（当然，元の数列 $\{x_n\}$ の部分列である）が存在する．
- しかし (4.2) より $|x_{n(n_k)}-\alpha| \geq \varepsilon_0$ より α に収束し得ない．これは任意の収束部分列が α に収束するという仮定に反する．□

4.2 実数の完備性

実数列 $\{x_n\}$ が収束するとは，ある実数 α があって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n-\alpha|<\varepsilon$$

が成り立つことであった．このように数列の収束の定義には極限値となる α が含まれている．しかし，例題 2 のように $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の極限により e と定義する場合，定義によりこの数列が収束することを示すことはできない．あるいは $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ で e を定義する場合も同様である．これらの場合は「上に有界な単調増加数列は収束する」という事実に基づき，極限値となる数をもちださずに数列が収束が示せることが鍵となっている．この事実は紛れもなく「実数の連続性」の帰結として得られるものである．ここでは，極限値となる数をもちださずに数列の収束を示すもう一つの方法を考える．次の定義をしよう．

定義

数列 $\{x_n\}$ が **Cauchy 列**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m,\ n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_m-x_n|<\varepsilon$$

が成り立つことである．

注 Cauchy 列は**基本列**とよばれることもある．

命題 0.13

数列 $\{x_n\}$ が Cauchy 列であれば，有界である．

証明

- $\{x_n\}$ は Cauchy 列であるから，$\varepsilon = 1$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_m - x_n| < 1$$
である．
- 特に
$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_{n_0}| < 1$$
が成り立つ．
- $|x_n - x_{n_0}| \geq |x_n| - |x_{n_0}|$ であるから $n \geq n_0$ ならば $|x_n| \leq |x_{n_0}| + 1$ が成り立つ．
- したがって $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}|+1\}$ とおくと $|x_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つ．したがって有界である．□

収束する数列は Cauchy 列である．

命題 0.14

数列 $\{x_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するならば Cauchy 列である．

証明 収束の定義から任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$n \geq n_0 \ \ \Rightarrow \ \ |x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$
が成り立つ．よって
$$\begin{aligned} m, n \geq n_0 \ \ \Rightarrow \ \ |x_m - x_n| &= |(x_m - \alpha) + (\alpha - x_n)| \\ &\leq |x_m - \alpha| + |x_n - \alpha| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$
が成り立つ．よって $\{x_n\}$ は Cauchy 列である．□

実数列においては次の定理が示すように収束することと Cauchy 列であることは同値である．

定理 0.15

数列 $\{x_n\}$ について
$$\{x_n\} \text{ はある実数に収束する} \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ は Cauchy 列である．}$$

証明

- $(\Rightarrow)$ は命題 0.14 で証明した．
- $(\Leftarrow)$ を示そう．$\{x_n\}$ を Cauchy 列とする．命題 0.13 より $\{x_n\}$ は有界である．
- Bolzano-Weierstrass の定理（定理 0.12）により $\{x_n\}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}$ はある実数 α に収束する．
- 部分列ではなく元の数列 $\{x_n\}$ はこの α に収束することを示そう．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．
- $\{x_n\}$ は Cauchy 列であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$n, m \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$
が成り立つ．よって $n_k \geq n_0$ ならば $m = n_k$ として
$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$$
が成り立つ．
- $\{x_{n_k}\}$ は α に収束するから，ある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad |x_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$
が成り立つ．
- 以上より $n \geq n_0$ ならば $n_k \geq n_0$ かつ $k \geq k_0$ なる n_k を用いれば
$$|x_n - \alpha| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ を意味する．□

このように $\mathbb{R}$ では Cauchy 列は自動的に収束するので極限値となる値を持ち出さずに収束することを示すことができる．上の定理にも Bolzano-Weierstrass の定理が使われていることから実数の連続性からの帰結であることがわかる．任意の Cauchy 列が収束するという性質を**完備性**という．完備性をもつ空間を設定してそこで極限によってある種の方程式の解を見つけることは解析学の常套手段であり，完備距離空間という形で応用数理 I でその威力を垣間見ることになるだろう．

例題４

(1) $0 < r < 1$ なるある実数 r に対して，実数列 $\{x_n\}$ が次の不等式を満たすとき，$\{x_n\}$ は収束することを証明せよ：
$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq r|x_{n+1} - x_n| \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

(2) $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$, $x_1 = 1$ で定義されるされる数列 $\{x_n\}$ は収束することを示し，極限値を求めよ．

解

(1) 不等式を使うと

$$|x_{n+1}-x_n| \leq r|x_n-x_{n-1}| \leq r^2|x_{n-1}-x_{n-2}| \leq \cdots \leq r^{n-1}|x_2-x_1|$$

が成り立つ．これより $m > n \geq 1$ ならば

$$\begin{aligned}|x_m-x_n| &\leq |x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n| \\ &\leq r^{m-2}|x_2-x_1|+r^{m-3}|x_2-x_1|+\cdots+r^{n-1}|x_2-x_1| \\ &= (r^{m-2}+r^{m-3}+\cdots+r^{n-1})|x_2-x_1| \\ &= \frac{r^{n-1}(1-r^{m-n})}{1-r}|x_2-x_1| \leq \frac{r^{n-1}}{1-r}|x_2-x_1|\end{aligned}$$

ここで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\dfrac{r^{n_0-1}}{1-r}|x_2-x_1| < \varepsilon$ となるように $n_0 \in \mathbb{R}$ をとれば $m > n \geq n_0$ なる任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|x_m-x_n| \leq \frac{r^{n-1}}{1-r}|x_2-x_1| \leq \frac{r^{n_0-1}}{1-r}|x_2-x_1| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって数列 $\{x_n\}$ は Cauchy 列である．したがって $\{x_n\}$ は収束する．

(2) この数列が，ある $r \in (0,1)$ に対して (1) の不等式を満たすことを示せばよい．与えられた条件から

$$\begin{aligned}x_{n+2}-x_{n+1} &= \sqrt{x_{n+1}+2}-\sqrt{x_n+2} \\ &= \frac{x_{n+1}-x_n}{\sqrt{x_{n+1}+2}+\sqrt{x_n+2}}\end{aligned}$$

であるから

$$|x_{n+2}-x_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{x_{n+1}+2}+\sqrt{x_n+2}}|x_{n+1}-x_n|$$

ここで，条件の式から $x_n \geq 0$ $(n=1,2,\cdots)$ が明らかに成り立つので

$$\frac{1}{\sqrt{x_{n+1}+2}+\sqrt{x_n+2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$$

よって

$$|x_{n+2}-x_{n+1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x_{n+1}-x_n| \quad (n=1,2,\cdots)$$

が成り立つ．よって (1) の結果からこの数列 $\{x_n\}$ は収束する．
次に極限値を求める．極限値を α とする．条件の式を 2 乗すると

$$x_{n+1}^2 = x_n+2$$

であるから $n \to \infty$ とすると α は

$$\alpha^2 = \alpha+2 \quad \text{つまり} \quad \alpha^2-\alpha-2=0, \quad (\alpha-2)(\alpha+1)=0$$

を満たす．これより $\alpha = 2, -1$ であるが $x_n \geq 0$ より $\alpha = -1$ はあり得ない．以上より $\alpha = 2$ となり $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$ である．

5 関数の極限

5.0.1 $\lim_{x\to a} f(x)$ の場合

ここでは関数の極限について考える．$\lim_{x\to a} f(x) = b$ とは「 x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき f の値 $f(x)$ が限りなく b に近づく」ということであった．そのため f は a で定義されている必要はない．

まずは f が a のある近傍の a 以外の点で定義されている場合，つまり，ある $r > 0$ が存在して $(a - r, a + r)\backslash\{a\}$ で定義されている場合を考える．

a の近傍から a を取り除いた集合を a の**除外近傍**という．つまり，a の除外近傍とは a のある近傍 U が存在して $U\backslash\{a\}$ と表される集合である．

定義

関数 f は a の除外近傍 $U\backslash\{a\}$ で定義されているとする．$\lim_{x\to a} f(x) = b$ であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < |x - a| < \delta,\ \ x \in U\backslash\{a\} \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - b| < \varepsilon$$

が成り立つことである．

注 $x \in U\backslash\{a\}$ であるので $|x - a| > 0$ であることは自明だが，のちに述べる連続の定義との違いをはっきりさせるためにあえて記す．

関数の極限は数列（点列）を用いて表現できる．

命題 0.16

関数 f は a の除外近傍 $U\backslash\{a\}$ で定義されているとする．$\lim_{x\to a} f(x) = b$ であるための必要十分条件は，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \ x_n \in U\backslash\{a\} \tag{5.1}$$

なる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ が成り立つことである．

証明 $\lim_{x\to a} f(x) = b$ とし，(5.1) を満たす数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ を示す．

- $\lim_{x\to a} f(x) = b$ であるから任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して
$$0 < |x - a| < \delta \quad x \in U\backslash\{a\} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon \tag{5.2}$$
- $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \delta$ が成り立つ．
- さらに $x_n \in U\backslash\{a\}$ だから $n \geq n_0$ ならば $|x_n - a| < \delta$ と (5.2) より $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ を意味する．

逆に (5.1) を満たす任意の数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b$ とすると $\lim_{x\to a} f(x)=b$ が成り立つことを示す．

- 結論を否定する．つまり，ある $\varepsilon_0>0$ が存在して，任意の $\delta>0$ に対して

$$0<|x-a|<\delta,\quad x\in U\backslash\{a\}\ \text{かつ}\quad |f(x)-b|\geq\varepsilon_0 \tag{5.3}$$

  となる x が存在すると仮定する．

- $\delta=1/n(n\in\mathbb{N})$ とすると各 n に対して (5.3) を満たす $x=x_n$ が存在する．この x_n $(n=1,2,\cdots)$ からなる数列 $\{x_n\}$ は次を満たす：

$$0<|x_n-a|<\frac{1}{n},\quad x_n\in U\backslash\{a\},\quad |f(x_n)-b|\geq\varepsilon_0\quad (n=1,2,\cdots)$$

- $0<|x_n-a|<1/n$ より $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ であるので数列 $\{x_n\}$ は (5.1) を満たす数列であるが $|f(x_n)-b|\geq\varepsilon_0$ より $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b$ を満たさない．これは矛盾である．したがって $\lim_{x\to a} f(x)=b$ が成り立つ．□

極限について次が成り立つ．

命題 0.17

関数 f,g は a の除外近傍 $U\backslash\{a\}$ で定義されているとする．$\lim_{x\to a} f(x)=b$, $\lim_{x\to a} g(x)=c$ とする．このとき次のことが成り立つ．

(1) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=b+c$

(2) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=bc$

(3) $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{c}$ （ただし $c\neq 0$）

注 (3) について例えば $c>0$ とする．このときある $\delta>0$ があって

$$0<|x-a|<\delta,\ x\in U\backslash\{a\}\quad\Rightarrow\quad |g(x)-c|<\frac{c}{2}$$

これから $0<\dfrac{c}{2}<g(x)<\dfrac{3}{2}c$ となる．よって a のより小さい除外近傍 $V\backslash\{a\}$ において $g(x)\neq 0$ である．$c<0$ と仮定しても同じである．したがって $c\neq 0$ のときは $U\backslash\{a\}$ で $g(x)\neq 0$ と仮定して差し支えない．

証明 定義に従って直接証明しても良いし，命題 0.16 を用いてもよい．

(1) 定義通り示してみよう．任意に $\varepsilon>0$ をとる．仮定から，ある $\delta_1>0$ が存在して

$$0<|x-a|<\delta_1,\quad x\in U\backslash\{a\}\quad\Rightarrow\quad |f(x)-b|<\frac{\varepsilon}{2}$$

同様にある $\delta_2 > 0$ が存在して

$$0 < |x-a| < \delta_2, \quad x \in U\backslash\{a\} \quad \Rightarrow \quad |g(x)-c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

したがって $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと $0 < |x-a| < \delta$, $x \in U\backslash\{a\}$ ならば

$$|\{f(x)+g(x)\} - \{b+c\}| \leq |f(x)-b| + |g(x)-c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

これは $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\} = b+c$ を意味する．

(2) 命題 0.16 を用いて証明しよう．(5.1) を満たす任意の数列 $\{x_n\}$ をとる．命題 0.16 より

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = c$$

である．よって命題 0.9 の (2) より $\lim_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = bc$ が成り立つ．$\{x_n\}$ は (5.1) を満たす任意の数列だったので再び命題 0.16 より $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc$ が成り立つ．

(3) (2) と全く同様であるので省略する．□

数列が収束するのはその数列が Cauchy 列であることが必要十分条件であった．このことは関数の極限においても同様である．

命題 0.18

関数 f は a の除外近傍 $U\backslash\{a\}$ で定義されているとする．$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在するため必要十分条件は，次の **Cauchy の条件**を満たすことである：任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$|x-a|, |x'-a| < \delta, \;\; x, x' \in U\backslash\{a\} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon \tag{5.4}$$

が成り立つことである．

証明 $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ならば Cauchy の条件を満たすことを示す．

- $\lim_{x\to a} f(x) = b$ より，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$|x-a| < \delta, \quad x \in U\backslash\{a\} \quad \Rightarrow \quad |f(x)-b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．よって $|x-a| < \delta$, $|x'-a| < \delta$, $x, x' \in U\backslash\{a\}$ ならば

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x)-b| + |b-f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ．つまり Cauchy の条件を満たす．

Cauchy の条件を満たすならば $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在することを示す．

- $\{x_n\}$ を (5.1) を満たす数列とする．このとき $\{f(x_n)\}$ は Cauchy 列であることを示そう．
- そのために任意に $\varepsilon > 0$ をとる．このとき Cauchy の条件から，ある $\delta > 0$ が存在して (5.4) が成り立つ．
- 数列 $\{x_n\}$ は $x_n \in U\backslash\{a\}$ であり $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ であるから，上の $\delta > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad 0 < |x_n - a| < \delta$$
が成り立つ．よって $m, n \geq n_0$ ならば $0 < |x_n - a|, |x_m - a| < \delta$, x_m, $x_n \in U\backslash\{a\}$ であるので (5.4) より $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ が成り立つ．これは $\{f(x_n)\}$ が Cauchy 列であることを示す．
- 実数の完備性（定理 0.15）より，ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ が成り立つ．
- (5.1) を満たす任意の数列 $\{y_n\}$ に対して，同様にして $c := \lim_{n\to\infty} f(y_n)$ が存在する．このとき $b = c$ であることを示そう．
- (5.4) の $\delta > 0$ に対して，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$n \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad 0 < |y_n - a| < \delta$$
が成り立つ．
- よって $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ ならば $0 < |x_n - a|, |y_n - a| < \delta$ で x_n, $y_n \in U\backslash\{a\}$ であるので
$$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$$
が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty}\{f(x_n) - f(y_n)\} = 0$ を意味する．よって $b = c$ が成り立つ．
- 以上より，ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して (5.1) を満たす任意の数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ が成り立つ．命題 0.16 より $\lim_{x\to a} f(x) = b$ が成り立つ．□

正の無限大，負の無限大に発散する場合も定義しておこう．a の除外近傍 $U\backslash\{a\}$ で定義された関数 $f(x)$ について，

- $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ であるとは任意の $K > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して
$$0 < |x - a| < \delta, \;\; x \in U\backslash\{a\} \quad \Rightarrow \quad f(x) > K$$
が成り立つことをいう．

- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ であるとは任意の $K>0$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して
$$0<|x-a|<\delta,\ \ x\in U\backslash\{a\} \quad \Rightarrow \quad f(x)<-K$$
が成り立つことをいう．

5.1 片側極限

片側極限についても定義を述べておこう．

- 関数 f は，ある $r>0$ があって $(a,a+r)$ で定義されているとする．このとき，$\lim_{x\to a+0} f(x) = b$ であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $0<\delta(<r)$ が存在して
$$0<x-a<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-b|<\varepsilon$$
が成り立つことである．

- 関数 f は，ある $r>0$ があって $(a-r,a)$ で定義されているとする．このとき，$\lim_{x\to a-0} f(x) = b$ であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $0<\delta(<r)$ が存在して
$$-\delta<x-a<0 \quad \Rightarrow \quad |f(x)-b|<\varepsilon$$
が成り立つことである．

5.1.1 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ の場合

$\lim_{x\to\infty} f(x)$ についても定義をまとめておこう．

- 関数 f は，ある $M>0$ があって $[M,\infty)$ で定義されているとする．このとき，$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $R(>M)$ が存在して
$$x>R \quad \Rightarrow \quad |f(x)-b|<\varepsilon$$
が成り立つことである．

- 関数 f は，ある $M>0$ があって $[M,\infty)$ で定義されているとする．このとき，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ であるとは，任意の $K>0$ に対して，ある $R(>M)$ が存在して
$$x>R \quad \Rightarrow \quad f(x)>K$$
が成り立つことである．

- 関数 f は，ある $M>0$ があって $[M,\infty)$ で定義されているとする．このとき，$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ であるとは，任意の $K>0$ に対して，ある $R(>M)$ が存在して
$$x>R \quad \Rightarrow \quad f(x)<-K$$
が成り立つことである．

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ についても同様に定義される．

6　連続関数・一様連続性

6.1　連続関数の定義

関数の連続性について述べよう．関数 f が a の近傍 $(a-r, a+r)$ で定義されているとき，f が a で**連続**であるとは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことであった．これを $\varepsilon - \delta$ 式に述べると次のようになる．

定義

関数 f は区間 I で定義された関数とする．$f(x)$ が $\underline{a \in I}$ で**連続**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - a| < \delta, \ \ x \in I \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つことである．
I のすべての点で f が連続であるとき，f は $\underline{I}$ で**連続**であるという．

注 関数の極限のときと異なり，今度は $f(x)$ は $x = a$ で定義されている必要がある．そのため $0 < |x - a| < \delta$ ではなく $|x - a| < \delta$ となっており，$x = a$ では自動的に $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ となっていることに注意．

命題 0.16 と同様に次のことを証明できる．

命題 0.19

関数 f は区間 I で定義された（実数値）関数とする．f が $a \in I$ で**連続**であるための必要十分条件は，$\{x_n\} \subset I$, $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ を満たす任意の数列 $\{x_n\}$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$$

が成り立つことである．

命題 0.17 と同様に次のことを証明できる．

命題 0.20

関数 f, g は区間 I で定義された関数とし， $a \in I$ で連続であるとする．このとき $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$ は連続である．さらに $g(a) \neq 0$ であるとき $\left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ も a で連続である．

6.2　Weierstrass の最大値定理と中間値の定理

有界閉区間で定義され，連続な関数の基本的な性質を述べる．

定理 0.21（Weierstrass の最大値定理）

関数 $f(x)$ は有界閉区間 $I=[a,b]$ で連続であるとする．このとき $f(x)$ は最大値と最小値をとる．

証明

Step 1. まず，f が $[a,b]$ 上で有界，つまり $\{f(x)|x\in[a,b]\}$ が有界であることを示す．上に有界であることを示す．下に有界であることは同様に示すことができる．

- 上に有界でないとすると，

  任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，$f(x)>n$ となる $x\in I$ が存在する．

- 各 n に対して上のような x を 1 つ選び，x_n とする．
- このように構成した数列 $\{x_n\}$ は $I=[a,b]$ 内の数列であるので有界である．したがって Bolzano-Weierstrass の定理（定理 0.12）より $\{x_n\}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}$ で，ある c に収束するものが存在する．$a\le x_{n_k}\le b$ であるから $a\le c\le b$ つまり $c\in I$ である．
- f は I で連続であるから，命題 0.19 より $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(c)$ が成り立つ．
- 一方，n_k は自然数からなる単調増加数列の k 番目の項であるから $n_k\ge k$ がすべての $k\in\mathbb{N}$ に対して成り立つ．このことに注意すると

  $$f(x_{n_k})>n_k\ge k\quad (k=1,2,\cdots)$$

  である．したがって $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\infty$ である．これは矛盾である（f は実数値関数であるから $f(c)$ は（有限の）実数値である！）．したがって上に有界である．

Step 2. f は最大値をとることを示す．最小値をとることも同様に示すことができる．

- Step 1 より，$\{f(x)|x\in[a,b]\}$ は上に有界であるので $M:=\sup\{f(x)|x\in[a,b]\}$ が存在する．M は $\{f(x)|x\in[a,b]\}$ の上界であるから

  $$x\in[a,b]\quad\Rightarrow\quad f(x)\le M$$

  が成り立つ．したがって $f(d)=M$ となる $d\in I=[a,b]$ が存在することを示せばよい．
- 上限の特徴づけ（命題 0.2）より，

  $n\in\mathbb{N}$ に対して $M-\dfrac{1}{n}<y\le M$ となる $y\in\{f(x)|x\in[a,b]\}$ が存在する．

- 各 n に対して上のような y を 1 つ選び，y_n とすると $y_n\in\{f(x)|x\in[a,b]\}$ より $y_n=f(x_n)$ となる $x_n\in I$ が存在する．

- このように構成した数列 $\{x_n\}$ は $I=[a,b]$ 内の数列であるので有界である．したがって Bolzano-Weierstrass の定理（定理 0.12）より $\{x_n\}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}$ で，ある d に収束するものが存在する．$a \leq x_{n_k} \leq b$ より $a \leq d \leq b$ つまり $d \in I$ である．

- f は I で連続であるから，命題 0.19 より $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(d)$ が成り立つ．

- 同様に $n_k \geq k$ であるから $M - \dfrac{1}{k} \leq M - \dfrac{1}{n_k}$ であることに注意すると

$$M - \frac{1}{k} \leq M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$$

 が成り立つ．この不等式で $k \to \infty$ とすることにより $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$ が成り立つ．以上より $M = f(d)$ であり，$x = d$ で f は最大値をとる．□

定理 0.22（中間値の定理）

関数 f は有界閉区間 $I=[a,b]$ で連続とする．このとき f は $f(a)$ と $f(b)$ の間の値をすべてとる．

証明

- $f(a) < f(b)$ とし，$f(a) < k < f(b)$ となる k をとる（$f(b) < f(a)$ の場合は $-f(x)$ を考えればよい）．

- 集合 $\{x \in [a,b] | f(x) < k\}$ を考えると，$f(a) < k$ より空集合でない．さらに $[a,b]$ の部分集合であるので上に有界である（b は 1 つの上界である）．したがって $x_0 := \sup\{x \in [a,b] | f(x) < k\}$ とおく．

- 上限の特徴づけ（命題 0.2）より，

$$\text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_0 \text{ かつ } f(x_n) < k$$

 となる $x_n \in [a,b]$ が存在する．上の不等式から $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ であり，$x_0 \in I$ である．$f(x)$ は x_0 で連続であるので命題 0.19 より

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

 であり，$f(x_0) \leq k$ が成り立つ．

- $f(x_0) < k$ と仮定して矛盾を導く．実際，$f(x_0) < k$ とすると $f(x)$ は x_0 で連続であるから，$\varepsilon = k - f(x_0) > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - x_0| < \delta, \quad x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < k - f(x_0)$$

つまり

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta,\ \ x\in[a,b]\quad\Rightarrow\quad -k+2f(x_0)<f(x)<k$$

が成り立つ．

- $0<\delta'\leq\delta$ を $x_0+\delta'\leq b$ となるようにとれば，

$$x_0\leq x<x_0+\delta'\quad\Rightarrow\quad f(x)<k$$

が成り立つ．これは x_0 の定義に反する（x_0 が上界となっていない）．以上より $f(x_0)=k$ が証明された．□

6.3 一様連続性

$I\subset\mathbb{R}$ で定義された関数 f を考える．f が 1 点 $a\in I$ で連続であるとは

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

が成り立つことであった．これを $\varepsilon-\delta$ 式に述べると次のようになる：

任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $\delta>0$ が存在して，$x\in I$ が $|x-a|<\delta$ を満たせば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つ．

ここで注意することは，上の「ある $\delta>0$ が存在して」というところである．1 点 a を指定してそこで連続かどうかを議論しているので，δ は ε だけでなく，あらかじめ指定した点 a にも依存している．それよりも強い**一様連続性**について定義しよう．

定義

f が I で**一様連続**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $\delta>0$ が存在して，

$$|x-x'|<\delta,\ x,\,x'\in I\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

が成り立つ．

このとき上で定まる δ は ε のみにしか依存していない．とにかく 2 点の距離さえ近ければ関数の値も近いと言っているのである．

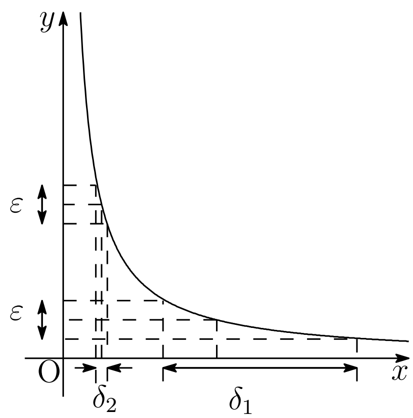
例

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\in[1,\infty))$ は一様連続である．
実際，$\varepsilon>0$ を任意にとると $\delta=\varepsilon$ とすれば $x,\,x'\in[1,\infty)$ が $|x-x'|<\delta$ を満たせば $1/x,\ 1/x'\leq1$ であるから

$$|f(x)-f(x')|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}\right|=\left|\frac{x-x'}{xx'}\right|\leq|x-x'|<\delta=\varepsilon$$

が成り立つ．

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\in(0,1])$ は連続ではあるが一様連続でない．



図から $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ となるための δ は原点に近いほど小さくとらなければならないことが見てとれそうである．

実際，一様連続であるとすると，$\varepsilon=1$ に対して，ある δ が存在して，

$$|x-x'|<\delta,\quad x,x'\in(0,1]\quad\Rightarrow\quad|f(x)-f(x')|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}\right|<1$$

が成り立つはずである．しかし，$x_n=\dfrac{1}{n+1}$, $x'_n=\dfrac{1}{n}$ とすると，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x'_n)=0$ であるから，ある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して $n\geq n_0$ ならば $x_n,x'_n\in(0,1]$ かつ $|x_n-x'_n|<\delta$ が成り立つ．したがって $n\geq n_0$ であれば

$$|x_n-x'_n|<\delta,\quad x_n,\ x'_n\in(0,1]\quad\text{かつ}\quad|f(x_n)-f(x'_n)|=|(n+1)-n|=1$$

である．これは矛盾である．

一様連続性について次のことが成り立つ．

定理 0.23

関数 f は有界閉区間 $I=[a,b]$ で連続であるとする．このとき $f(x)$ は I で一様連続である．

証明

- 一様連続でないと仮定する．このとき，ある $\varepsilon_0>0$ があって，

  どんな $\delta>0$ に対しても，$|x-x'|<\delta,\ \ x,\ x'\in I$ かつ $|f(x)-f(x')|\geq\varepsilon_0$

  となる $x,\ x'$ が存在する．

- 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して上で $\delta=1/n$ とすることにより

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n},\ \ x_n, x'_n \in I \ \text{かつ}\ |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$$

となる x_n, x'_n が存在する．こうして構成される２つの数列 $\{x_n\}, \{x'_n\}$ を考える．

- 数列 $\{x_n\}$ は I の数列なので有界である．したがって，Bolzano-Weierstrass の定理（定理0.12）より，$\{x_n\}$ はある c に収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在する．$a \leq x_{n_k} \leq b$ より $a \leq c \leq b$ つまり $c \in I$ である．
- また $|x_n - x'_n| < \dfrac{1}{n}$ より $|x_{n_k} - x'_{n_k}| < \dfrac{1}{n_k} \leq \dfrac{1}{k}$ であるので $\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - x'_{n_k}) = 0$ である．したがって

  $$\lim_{k\to\infty}(x'_{n_k} - c) = \lim_{k\to\infty}(x'_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - c) = \lim_{k\to\infty}(x'_{n_k} - x_{n_k}) + \lim_{k\to\infty}(x'_{n_k} - c) = 0$$

  である．
- f は c で連続なので $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(c)$ である．一方，$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ よりこれは矛盾である．したがって $f(x)$ は I で一様連続である．□

上の定理は「有界閉区間で連続な関数は積分可能である」という事実を証明するときに用いられる．そのダイジェストを以下に述べて準備の節を終えることにする．

6.3.1 リーマン積分可能性

- 閉区間 $[a, b]$ 上で有界な関数 f に対し，リーマン積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の定義を復習しよう．
- 閉区間 $[a, b]$ の分割を考える：

  $$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

- この分割に対し

  $$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$
  $$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

  $(i = 1, \cdots, n)$ とする．
- 次に

  $$\overline{S}(f : \Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$
  $$\underline{S}(f : \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

- このとき，任意の分割 Δ, Δ' に対し

$$\underline{S}(f:\Delta) \leq \overline{S}(f:\Delta')$$

が成り立つ．実際，Δ と Δ' の分点をあわせてできる分割を Δ'' とすると

$$\underline{S}(f:\Delta) \leq \underline{S}(f:\Delta'') \leq \overline{S}(f:\Delta'') \leq \overline{S}(f:\Delta')$$

が成り立つからである，ここで，$J \subset I \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\sup\{f(x) : x \in J\} \leq \sup\{f(x) : x \in I\},$$
$$\inf\{f(x) : x \in J\} \geq \inf\{f(x) : x \in I\}$$

であること（命題 0.3）を用いた．

- そこで

$$\underline{S}(f) = \sup\{\underline{S}(f:\Delta) | \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\}$$
$$\overline{S}(f) = \inf\{\overline{S}(f:\Delta) | \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\}$$

とおく．このとき

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

であるとき，f は $[a,b]$ 上で **（Riemann）積分可能**であるといい，この値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

とかく．

定理 0.24

有界閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 f は Riemann 積分可能である．

証明

- f は $[a,b]$ で連続だから，M_i, m_i の定義の sup, inf はそれぞれ max, min となる（定理 0.21）．

- よって，任意の分割 Δ

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

に対し

$$f(\underline{x}_i) = m_i,\ f(\overline{x}_i) = M_i$$

となる $\underline{x}_i, \overline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \cdots, n)$ が存在する．

- 次に f は $[a,b]$ で<u>一様連続</u>であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $\delta>0$ が存在して

$$|x-x'|<\delta,\quad x,x'\in[a,b]\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

が成り立つ．

- 分割 $\Delta : a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ を $|x_i-x_{i-1}|<\delta\ (i=1,\cdots,n)$ となるようにとると $|\overline{x}_i-\underline{x}_i|<\delta\ (i=1,\cdots,n)$ であるから

$$0\le M_i-m_i=f(\overline{x}_i)-f(\underline{x}_i)<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

つまり $M_i\le m_i+\dfrac{\varepsilon}{b-a}\ (i=1,2,\cdots,n)$ が成り立つ．

- よって

$$\begin{aligned}\overline{S}(f)\le\overline{S}(f:\Delta)&=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})\\&\le\sum_{i=1}^{n}\left(m_i+\frac{\varepsilon}{b-a}\right)(x_i-x_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_i-x_{i-1})\\&=\underline{S}(f:\Delta)+\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\\&=\underline{S}(f:\Delta)+\varepsilon\le\underline{S}(f)+\varepsilon\end{aligned}$$

つまり $0\le\overline{S}(f)-\underline{S}(f)<\varepsilon$ が成り立つ．$\overline{S}(f)-\underline{S}(f)$ は ε に無関係であるから

$$\overline{S}(f)-\underline{S}(f)=0\ \ \text{つまり}\ \ \overline{S}(f)=\underline{S}(f)$$

$\square$