3 超関数の台

- 簡単のため，$N = 1$ として Dirac の δ 超関数 $\delta : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を考えよう．このとき $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ について $\mathrm{supp}\varphi \subset (0, \infty)$ であれば，$\delta(\varphi) = \varphi(0) = 0$ である．同様にして $\mathrm{supp}\varphi \subset (-\infty, 0)$ であっても同様に $\delta(\varphi) = 0$ である．この事実は次のように述べられる：**δ は $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ で 0 である**．本節では，簡単のため，$\mathbb{R}^N$ 上の超関数に関してその台について解説する．

定義

$T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ とする．ある開集合 $U \subset \mathbb{R}^N$ が存在して

$$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N), \quad \mathrm{supp}\varphi \subset U \quad \Rightarrow \quad T(\varphi) = 0$$

が成り立つとき，**T は U で 0 である**という．

超関数の台を定義するのに必要な 1 の分割について述べよう．

命題 3.1（1 の分割）

$K \subset \mathbb{R}^N$ をコンパクト集合（有界閉集合）とする．開集合 $U_1, \cdots, U_k$ が

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$$

が成り立つとする．このとき，ある $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ で

- $0 \leq \varphi_i \leq 1$
- $\mathrm{supp}\varphi_i \subset U_i$
- K を含むある開集合で $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \varphi_i = 1$

を満たすものが存在する．

- 証明は略

命題 3.2

$U_\lambda \subset \mathbb{R}^N$ $(\lambda \in \Lambda)$ を開集合とし，$T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ は各 U_λ で 0 であるとする．このとき

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

とすると T は U で 0 である．

証明

- $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ とし，$\mathrm{supp}\varphi \subset U$ とする．このとき $T(\varphi) = 0$ を示そう．
- $K := \mathrm{supp}\varphi \subset U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ で K はコンパクトであるから，有限個の $U_1, \ldots, U_k$ が存在して $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ が成り立つ．
- 命題 3.1 により $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ で

$$0 \leq \varphi_i \leq 1,\ \mathrm{supp}\varphi_i \subset U_i,\ \ K \text{ を含むある開集合で } \sum_{i=1}^{k} \varphi_i = 1$$

  を満たすものが存在する．
- T は U_i $(i = 1, \cdots, k)$ で 0 なので $T(\varphi\varphi_i) = 0$ $(i = 1, \cdots, k)$ である．
- $\mathrm{supp}\varphi \subset K$ より $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(x)\varphi_i(x)$ である．
- したがって

$$T(\varphi) = T\left(\sum_{i=1}^{k} \varphi\varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{k} T(\varphi\varphi_i) = 0$$

  よって示された．□

定義

$T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ とする．

$$\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{U \subset \mathbb{R}^N:\text{open},\ T=0 \text{ on } U} U$$

を T の**台**といい，$\mathbf{supp}\boldsymbol{T}$ と表す．

注 命題 3.2 より T は $\mathbb{R}^N \setminus K$ で 0 である．

例 1 Dirac の δ 関数 δ について $\mathrm{supp}\delta = \{0\}$ である．

例 2 Heaviside 関数 H が定義する超関数 T_H について $\mathrm{supp}T_H = [0, \infty)$ である．

補題 3.3

$T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ とし，$K := \mathrm{supp}T$ はコンパクトとする．このとき，K を含むある開集合 U があって $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ が

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \quad (x \in U)$$

ならば

$$T(\varphi_1) = T(\varphi_2)$$

である．

証明

- $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus K$ とおく．
- $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ とすると，$\varphi = 0$ on K なので $\mathrm{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^N \setminus K = \Omega$ である．したがって $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ である．
- したがって命題 3.2 の後の注により $T(\varphi) = 0$ が成り立つ．したがって $T(\varphi_1) = T(\varphi_2)$ を得る．□

簡単のため 1 次元のみとするが次のことが成り立つ．

命題 3.4

$T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ に対して，$\mathrm{supp}T = \{0\}$ とする．このとき，ある非負整数 m と，c_i $(i = 0, \cdots, m)$ が存在して

$$T = \sum_{i=0}^{m} c_i \frac{d^j \delta}{dx^j}$$

と表される．

証明

- $K = [-1, 1]$ とすると命題 1.4 より，ある $C > 0$ と非負整数 m があって

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{j=0}^{m} \sup_{x \in [-1,1]} \left| \frac{d^j \varphi}{dx^j} \right| \quad {}^\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ with } \mathrm{supp}\varphi \subset (-1, 1)$$

- $x = 0$ の近傍で $\zeta(x) \equiv 1$ である $\zeta \in C_0^\infty(-1, 1)$ をとる．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\zeta_k(x) = \zeta(kx)$ とおくと $\zeta_k \in C_0^\infty(-1, 1)$ である．また，補題 3.3 より

$$T(\varphi) = T(\varphi\zeta_k) \quad {}^\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \tag{3.1}$$

が成り立つ．

- 任意に $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ をとり
$$\varphi_m(x) = \varphi(x) - \sum_{j=0}^{m} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} x^j$$
とおく．
- $\psi_k(x) = \varphi_m(x)\zeta_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ とおく．Taylor の定理より
$$\begin{aligned}
&\varphi_k^{(l)}(x) = \varphi^{(l)}(x) - \left\{ \sum_{j=l}^{m} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{(j-l)!} x^{j-l} \right\} = O(|x|^{m-l+1}) \quad (\text{as } |x| \to 0) \\
&\zeta_k^{(l)}(x) = O(k^l) \quad (\text{as } k \to \infty)
\end{aligned}$$
- これと $\mathrm{supp}(\varphi_m\zeta_k) \subset (-1/k, 1/k)$ に注意すると
$$\begin{aligned}
|T(\varphi_m\zeta_k)| &\le C \sum_{j=0}^{m} \sup_{x \in [-1/k, 1/k]} \left| \frac{d^j(\varphi_m\zeta_k)}{dx^j} \right| \\
&\le C \sum_{0 \le j+l \le m} \sup_{x \in [-1/k, 1/k]} |\varphi_m^{(j)}(x)| \sup_{x \in [-1/k, 1/k]} |\zeta_k^{(l)}(x)| \\
&\le C \sum_{0 \le j+l \le m} k^{-(m+1-j)} k^l = C \sum_{0 \le j+k \le m} k^{j+l-m+1} \le \frac{C}{k} \to 0 \quad (\text{as} \quad k \to \infty)
\end{aligned}$$
- 一方，$\mathrm{supp}(\varphi_m\zeta_k) \subset (-1/k, 1/k)$ に注意すると補題 3.3 より $T(\varphi_m\zeta_k)$ は k によらないので
$$T(\varphi_m\zeta_1) = \lim_{k \to \infty} T(\varphi_m\zeta_k) = 0$$
である．したがって再び (3.1) より
$$\begin{aligned}
T(\varphi) = T(\varphi\zeta_1) &= T(\varphi_m\zeta_1) + \sum_{j=0}^{m} T\left(\frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} (\cdot)^j \zeta_1 \right) \\
&= \sum_{j=0}^{m} T\left(\frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} (\cdot)^j \eta_1 \right) \varphi^{(j)}(0)
\end{aligned}$$
- また $\dfrac{d^j\delta}{dx^j}(\varphi) = (-1)^j \varphi^{(j)}(0)$ であるから，$c_j = (-1)^j T\left(\dfrac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} (\cdot)^j \eta_1 \right)$ とおいて
$$T(\varphi) = \sum_{j=0}^{m} c_j \frac{d^j\delta}{dx^j}(\varphi)$$
が成り立つ．□