2　超関数の演算

2.1　超関数の和・スカラー倍・関数との積

和・スカラー倍

- T, $S \in \mathscr{D}'(\Omega)$ に対して，和 $T+S$ を
$$(T+S)(\varphi) := T(\varphi) + S(\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$$
で定義する．
- $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対してスカラー倍 αT を
$$(\alpha T)(\varphi) := \alpha(T(\varphi)) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$$
で定義する．
- このとき $T+S$, $\alpha T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ である．

関数との積

- $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $a \in C^\infty(\Omega)$ とする．このとき a と T の積 aT を
$$(aT)(\varphi) := T(a\varphi) \tag{2.1}$$
で定義する．

命題 2.1

$T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $a \in C^\infty(\Omega)$ のとき (2.1) で定義される aT は $aT \in \mathscr{D}'(\Omega)$ である．

証明

- φ_1, $\varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$ とすると $a\varphi_i \in \mathscr{D}(\Omega)$ より
$$\begin{aligned}(aT)(\varphi_1+\varphi_2) = T(a(\varphi_1+\varphi_2)) = T(a\varphi_1 + a\varphi_2) &= T(a\varphi_1) + T(a\varphi_2) \\ &= aT(\varphi_1) + aT(\varphi_2)\end{aligned}$$
- $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して
$$aT(\alpha\varphi) = T(a(\alpha\varphi)) = T(\alpha(a\varphi)) = \alpha(T(a\varphi)) = \alpha(aT(\varphi))$$
- 次に連続性を示そう．$\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(\Omega)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ が $\varphi_n \to \varphi$ $(n \to \infty)$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$ とする．

- このとき，ある Ω のコンパクト集合 K が存在して $\mathrm{supp}\varphi_n$, $\mathrm{supp}\varphi \subset K$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立ち，さらに，任意の多重指数 α に対して

  $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi| = 0$$

  が成り立つ．

- $a \in C^\infty(\Omega)$ より $a\varphi_n, a\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ $(n = 1, 2, \dots)$ であり，$\mathrm{supp} a\varphi_n$, $\mathrm{supp} a\varphi \subset K$ $(n = 1, 2, \dots)$ が成り立つ．

- Leibnitz の公式（多変数版）より

  $$D^\alpha(a\varphi_n) = \sum_{\beta:\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a D^{\alpha-\beta}\varphi_n, \quad D^\alpha(a\varphi) = \sum_{\beta:\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a D^{\alpha-\beta}\varphi$$

  ここで多重指数について，$\beta \le \alpha$ とは $\beta_j \le \alpha_j$ $(j = 1, \dots, N)$ が成り立つことであり，

  $$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^{N} \binom{\alpha_j}{\beta_j}$$

  である．

- よって

  $$D^\alpha(a\varphi_n) - D^\alpha(a\varphi) = \sum_{\beta:\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a \{D^{\alpha-\beta}\varphi_n - D^{\alpha-\beta}\varphi\}$$

  $$\sup_{x\in K} |D^\alpha(a\varphi_n) - D^\alpha(a\varphi)| \le \sum_{\beta:\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x\in K} |D^\beta a| \sup_{x\in K} |D^{\alpha-\beta}\varphi_n - D^{\alpha-\beta}\varphi| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

- したがって $a\varphi_n \to a\varphi$ $(n \to \infty)$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ である．

- $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ であるから

  $$aT(\varphi_n) = T(a\varphi_n) \to T(a\varphi) = aT(\varphi) \quad (\text{as} \quad n \to \infty)$$

- 以上より $aT \in \mathscr{D}'(\Omega)$ である．$\Box$

2.2 超関数の偏微分

- $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ とするとき命題 1.3 より，任意の多重指数 α に対して

  $$T_\alpha(\varphi) := T(D^\alpha\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$$

  で定義される T_α は $T_\alpha \in \mathscr{D}'(\Omega)$ となるのであった．

定義

$T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ に対し

$$D^\alpha T(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi)$$

で定義される，$D^\alpha T$ を 超関数 T の **$\boldsymbol{\alpha}$− 偏微分**という．

例 1

- $H(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ を **Heaviside 関数**という．
- $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ より H 自身を超関数とみなしたとき（正確には T_H を考える）

$$\frac{d}{dx} H = \delta$$

  が成り立つ（$N = 1$ なので微分記号も通常のものを用いる）ことを示そう．
- $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ を任意にとると定義から

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx} H, \varphi \right\rangle &= -\left\langle H, \frac{d}{dx} \varphi \right\rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} H(x) \varphi'(x) dx = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \delta(\varphi) \end{aligned}$$

  が成り立つ．ここで $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ より $\varphi(\infty) = 0$ に注意．
- φ は任意より $\dfrac{d}{dx} H = \delta$ である．

例 2 $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{c\})$ $(c \in \mathbb{R})$ とする，つまり，f は $(-\infty, c) \cup (c, \infty)$ の各点で微分可能，かつ，導関数は $(-\infty, c) \cup (c, \infty)$ で連続とする．さらに

$$f(c+0) = \lim_{x \to c+0} f(x), \quad f(c-0) = \lim_{x \to c-0} f(x)$$

がともに存在するとする．このとき $\gamma := f(c+0) - f(c-0)$ とおくとき，f が定義する超関数 T_f について（$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ に注意）

$$\frac{dT_f}{dx} = \gamma \delta + \{f'\}$$

が成り立つ，ただし

$$\{f'\}(x) := \begin{cases} f'(x) & x \neq c, \\ 0 & x = c \end{cases}$$

である．これについては各自確かめよ．

命題 2.2

$f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ のとき，$|\alpha| = 1$ なる任意の多重指数 α に対して

$$D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f} \quad \text{in} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ．

補題 2.3(部分積分の公式（多次元）)

U を $\mathbb{R}^N$ の有界開集合，∂U は滑らかな超曲面とする．このとき $f \in C^1(\overline{U})$ とすると次が成り立つ：

$$\int_U f_{x_i} dx = \int_{\partial U} f \nu_i dS.$$

ただし $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ は ∂U の外向き法線ベクトル，左辺は N 重積分，右辺は面積分である（dS は面積要素）．

命題 2.2 の証明

- $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ を任意にとると $\mathrm{supp}\varphi \subset B_R(0)$ なる $R > 0$ をとることができ，このとき $\varphi = 0$ $(|x| \geq R)$ が成り立つ．
- $|\alpha| = 1$ より $D^\alpha = \partial_{x_i}$ と表すと

  $$\langle D^\alpha T_f, \varphi \rangle = -\langle T_f, D^\alpha \varphi \rangle = -\int_{B_R(0)} f \varphi_{x_i} dx$$

  である．
- $(f\varphi)_{x_i} = f_{x_i}\varphi + f\varphi_{x_i}$ だから，$U = B_R(0)$ として部分積分の公式を用いると

  $$\begin{aligned} \langle D^\alpha T_f, \varphi \rangle &= -\int_{B_R(0)} (f\varphi)_{x_i} dx + \int_{B_R(0)} f_{x_i} \varphi dx \\ &= -\int_{\partial B_R(0)} f \varphi \nu_i dS + \int_{B_R(0)} f_{x_i} \varphi dx \\ &= \int_{B_R(0)} (D^\alpha f) \varphi dx = \langle T_{D^\alpha f}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

- したがって $D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f}$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ である．

注 $f \in C^1_(\Omega)$ であっても $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ をとれば $\mathrm{supp}\varphi \subset K$ なる Ω のコンパクト集合 K が取れる．K と $\partial\Omega$ の間に「隙間」があるので $K \subset U \subset \Omega$ なる ∂U が滑らかな超曲面となる有界開集合 U を取ればいいので，Ω 上の超関数として同じ等式が成り立つ．

ラプラシアンの基本解

補題 2.4(Green の定理)

$U \subset \mathbb{R}^N$ を有界開集合，∂U は滑らかな $\mathbb{R}^N$ の超曲面とする．$f, g \in C^2(\overline{\Omega})$ とする．このとき

$$\int_U (\Delta f) g dx - \int_U f(\Delta g) dx = \int_{\partial U} f \frac{\partial g}{\partial \nu} dS - \int_{\partial U} \frac{\partial f}{\partial \nu} g dS$$

が成り立つ．ここで ν は ∂U の外向き法線ベクトル，$\dfrac{\partial f}{\partial \nu} = \nabla f \cdot \nu$ である．

命題 2.5

$N = 2$, $E(x) = \dfrac{1}{2\pi} \log |x|$ $(|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ とすると

$$\Delta E = \delta \ \ \text{in} \ \ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$$

つまり

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad ({}^\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2))$$

である．

注 $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ である．実際，任意の $r > 0$ に対して

$$\int_{\overline{B_r(0)}} |E(x)| dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq r} |E(x)| dx < \infty$$

である（各自確かめよ）．

証明

- 直接計算により $\Delta E = 0$ $(x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ が成り立つ．
- $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ を任意にとる．$\mathrm{supp}\varphi \subset B_R(0)$ なる $R > 0$ をとり
$$\Omega_{\varepsilon,R} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < |x| < R\}$$
とおく．
- $\Omega_{\varepsilon,R}$ において Green の定理を用いると
$$\int_{\Omega_{\varepsilon,R}} E \Delta \varphi dx - \int_{\Omega_{\varepsilon,R}} (\Delta E) \varphi dx = \int_{\partial \Omega_{\varepsilon,R}} E \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS - \int_{\partial \Omega_{\varepsilon,R}} \frac{\partial E}{\partial \nu} \varphi dS$$
- $\varphi = 0$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ on $\partial B_R(0)$ に注意すると
$$\text{右辺} = \int_{|x|=\varepsilon} E \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS - \int_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial \nu} \varphi dS = I_\varepsilon + II_\varepsilon$$
である．

- I_ε については

$$|I_\varepsilon| \le \frac{1}{2\pi}|\log\varepsilon||\nabla\varphi|2\pi\varepsilon \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0$$

である．

- **Claim:** $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} II_\varepsilon = \varphi(0)$

- φ は $x=0$ で連続より，任意の $\rho>0$ に対し，ある $\varepsilon_0>0$ が存在して

$$|x|<\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x)-\varphi(0)|<\rho$$

が成り立つ．

- $\Omega_{\varepsilon,R}$ の $|x|=\varepsilon$ における外向き法線ベクトルは $-x/|x| = -x/\varepsilon$ より

$$\frac{\partial E}{\partial\nu} = \nabla E\cdot\nu = -\frac{1}{2\pi|x|} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \quad \text{on} \quad |x|=\varepsilon$$

である．

- したがって

$$II_\varepsilon = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi(x)dS$$

- $\varphi(0) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi(0)dx$ を用いると

$$|II_\varepsilon - \varphi(0)| \le \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}|\varphi(x)-\varphi(0)|dS$$

である．

- $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ ならば $|\varphi(x)-\varphi(0)|<\rho$ より

$$|II_\varepsilon - \varphi(0)| \le \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\rho dS = \rho$$

を得る．これは $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} II_\varepsilon = \varphi(0)$ を意味する．

- 以上より

$$\langle E, \Delta\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\Omega_{\varepsilon,R}} E\Delta\varphi dx = \varphi(0)$$

を得る．$\square$

同様に次を示すことができる．

命題 2.6

$N \geq 3$ を自然数とし $E(x) = -\dfrac{1}{(N-2)\omega_{N-1}|x|^{N-2}}$ とすると

$$\Delta E = \delta \quad \text{in} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$$

つまり

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad ({}^\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N))$$

である．ここで ω_N は N 次元単位球の体積で $N\omega_N$ は N 次元単位球面の表面積となる．

2.3 超関数の収束

定義

$\{T_n\} \subset \mathscr{D}'(\Omega)$, $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ とする．

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi) \quad ({}^\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$$

が成り立つとき，$\{T_n\}$ は $\mathscr{D}'(\Omega)$ の意味で T に**収束する**といい

$$T_n \to T \quad (n \to \infty) \quad \text{in} \quad \mathscr{D}'(\Omega)$$

と表す．

定理 2.7

$\{T_n\} \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ とする．任意の $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ に対し $\{T_n(\varphi)\} \subset \mathbb{C}$ は Cauchy 列（したがって収束列）であるとする．このとき

$$T(\varphi) := \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$$

とすると，$T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ となる．

この証明には Baire のカテゴリー定理から導かれる Banach-Steinhaus の定理を用いるためここでは述べない．

δ 関数の近似列

例３ $f_n(x) = \dfrac{n}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ とする．このとき

$$T_{f_n} \to \pi\delta \ \ (n \to \infty) \ \ \text{in} \ \ \mathscr{D}'(\mathbb{R})$$

証明

- $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ を任意にとると

$$T_{f_n}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy$$

- ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}dy = \pi \quad \text{より} \quad \pi\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\varphi(0)dy$$

$$T_{f_n}(\varphi) - \pi\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\left\{\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right\}dy$$

- **Claim:** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\left\{\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right\}dy = 0$
- $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ より $M := \sup_{\mathbb{R}} |\varphi| < \infty$ である．
- $\varepsilon > 0$ を任意にとる．このとき，ある $L > 0$ が存在して

$$2M\int_{|y|\geq L} \frac{1}{1+y^2}dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

  が成り立つ．
- このとき

$$\begin{aligned}
|T_{f_n}(\varphi) - \pi\varphi(0)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\left\{\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right\}dy\right| \\
&\leq \int_{|y|\leq L} \frac{1}{1+y^2}\left|\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right|dy + \int_{|y|\geq L} \frac{1}{1+y^2}\left|\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right|dy \\
&\leq \int_{|y|\leq L} \frac{1}{1+y^2}\left|\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right|dy + \int_{|y|\geq L} \frac{1}{1+y^2}2Mdy \\
&\leq \int_{|y|\leq L} \frac{1}{1+y^2}\left|\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right|dy + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

- 次に φ は $x = 0$ で連続より，上の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x) - \varphi(0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

が成り立つ．このとき，$N \in \mathbb{N}$ を $\dfrac{L}{N} < \delta$ とすると

$$n \geq N,\ |y| \leq L \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{y}{n}\right| < \delta$$

であるので

$$n \geq N, \quad |y| \leq L \quad \Rightarrow \quad \left|\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

が成り立つ．

- したがって $n \geq N$ ならば

$$|T_{f_n}(\varphi) - \pi\varphi(0)| \leq \int_{|y|\leq L} \frac{1}{1+y^2}\left|\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right| dy + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

である．これは $\lim_{n\to\infty} T_{f_n}(\varphi) = \pi\varphi(0)$ を意味する．

- φ は任意なので $T_{f_n} \to \pi\delta\ (n \to \infty)$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ である．□

同様にして次のことがわかる：

命題 2.8

$f \geq 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f dx = 1$ とする．このとき $f_n(x) = nf(nx)$ とすると

$$T_{f_n}(\varphi) \to \delta \quad (n \to \infty) \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ．