解析学特論講義ノート（Schwartz超関数編）

松澤　寛

1　超関数の定義

1.1　試験関数

- $\varphi \in C(\mathbb{R}^N)$ に対して

  $$\overline{\{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) \neq 0\}}$$

  を φ の**台**といい，$\operatorname{supp}\varphi$ と表す．$\operatorname{supp}\varphi$ は $\mathbb{R}^N$ の閉集合である．

- 次に**多重指数 (multi-index)** を定義しよう．$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ に対して

  $$\begin{aligned}
  &|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N, \\
  &\alpha! = \alpha_1! \cdot \cdots \cdot \alpha_N! \\
  &D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} \quad \text{つまり} \quad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} \\
  &x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N} \quad (x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N)
  \end{aligned}$$

  $\alpha + \beta$ は普通の意味で定義する．

$\boxed{\textbf{注}}$ $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ のノルム $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ と多重指数の $|\alpha|$ は同じ記号であるので注意．

- $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ で台 $\operatorname{supp}\varphi$ が $\mathbb{R}^N$ のコンパクト集合（有界閉集合）であるものの全体を $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ と表す：

  $$C_0^\infty(\mathbb{R}^N) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \operatorname{supp}\varphi \text{ は } \mathbb{R}^N \text{ のコンパクト集合}\}$$

  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ は $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ ともかかれる．

- $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ ならば，任意の多重指数 α に対して $D^\alpha\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ が成り立つ．

- $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ の例をあげよう．まず

  $$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & (t > 0), \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

  とおくと $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ である（証明略）．

- この f を用いて $\varphi(x) = f(1 - |x|^2)$ とおくと $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ であり，

  $$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

  である．$\operatorname{supp}\varphi = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 1\}$ より $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ である．

注 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)dx=\int_{|x|\le 1}\varphi(x)dx=1$ となるように

$$C=\int_{\mathbb{R}^N}f(1-|x|^2)dx=\int_{|x|\le 1}f(1-|x|^2)dx$$

とおき $\varphi(x)=C^{-1}f(1-|x|^2)$ として用いることが多い．

1.2　超関数の定義と例

$\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ における収束

定義

$\{\varphi_n\}\subset\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ が $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ に**収束する**とは次の２条件が成り立つことである；

(i) あるコンパクト集合 $K\subset\mathbb{R}^N$ があって $\operatorname{supp}\varphi_n\subset K({}^\forall n\in\mathbb{N})$, $\operatorname{supp}\varphi\subset K$ が成り立つ．

(ii) 任意の多重指数 α に対して

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi_n(x)-D^\alpha\varphi(x)|=0$$

が成り立つ．つまり，任意の多重指数 α に対して $D^\alpha\varphi_n$ は $D^\alpha\varphi$ に K 上一様収束する．

このとき

$$\varphi_n\to\varphi\ \ (n\to\infty)\ \ \text{in}\ \ \mathscr{D}(\mathbb{R}^N),\quad \lim_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi\ \ \text{in}\ \ \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$$

などと表す．

注

- (i) より $\mathbb{R}^N\setminus K$ で $\varphi_n=\varphi=0$ より (ii) より任意の多重指数 α に対して $D^\alpha\varphi_n$ は $D^\alpha\varphi$ へ $\mathbb{R}^N$ 上一様収束するといえる．
- $\{\varphi_n\}\subset\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ が $\varphi_n\to\varphi$ $(n\to\infty)$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ ならば

$$D^\alpha\varphi_n\to D^\alpha\varphi\ \ (n\to\infty)\ \ \text{in}\ \ \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$$

である．実際，$\{\varphi_n\}$ の収束の定義から，$\operatorname{supp}\varphi_n,\operatorname{supp}\varphi\subset K$ なるコンパクト集合 K がとれる．任意の多重指数 β に対して $\alpha+\beta$ も多重指数であるから

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}|D^\beta(D^\alpha\varphi_n(x))-D^\beta(D^\alpha\varphi(x))|\\&=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}|D^{\alpha+\beta}\varphi_n(x)-D^{\alpha+\beta}\varphi(x)|=0\end{aligned}$$

である．したがって成り立つ．

- $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ に属する関数を**試験関数**あるいは**テスト関数**といい，$\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ を**試験関数の空間**あるいは**テスト関数の空間**という．

超関数の定義

定義

$T : \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ とする（T は**汎関数**とよばれる）．T が 2 条件を満たすとき T が $\mathbb{R}^N$ 上の**超関数**という：

(i) T は線形である，つまり

$$\begin{aligned} &T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2) \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)), \\ &T(\alpha\varphi) = \alpha T(\varphi) \quad (\alpha \in \mathbb{C},\ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)) \end{aligned}$$

(ii) T が次の意味で連続である：

$$\varphi_n \to \varphi\ (n \to \infty) \ \text{ in } \ \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \quad \Rightarrow \quad T(\varphi_n) \to T(\varphi) \quad (n \to \infty)$$

- $\mathbb{R}^N$ 上の超関数全体を $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ と表す．
- $T(\varphi)$ は $\langle T, \varphi \rangle$ ともかかれる．

超関数の例

例 1 $\delta : \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ を

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)$$

で定義すると $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ である．

- 線形性は明らか．
- 連続性を示そう．$\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^N), \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ が $\varphi_n \to \varphi\ (n \to \infty)$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ とする．このとき，あるコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^N$ が存在して

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp}\varphi_n, \operatorname{supp}\varphi \subset K({}^\forall n \in \mathbb{N}), \\ &\{\varphi_n\} \text{ は } \varphi \text{ に } K(\mathbb{R}^N) \text{ 上一様収束する} \end{aligned}$$

  特に $\{\varphi_n\}$ は φ に $\mathbb{R}^N$ 上各点収束する．したがって

$$\delta(\varphi_n) = \varphi_n(0) \to \varphi(0) = \delta(\varphi) \quad (n \to \infty))$$

- δ を **Dirac の $\boldsymbol{\delta}$ 関数**という．
- $a \in \mathbb{R}^N$ に対して $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)\ (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N))$ と定義しても $\delta_a \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ である．

例２

- $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ を次で定義する：

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)=\left\{ f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}:\ \begin{array}{l} f:\text{Lebesgue 可測} \\ {}^\forall K\subset\mathbb{R}^N:\text{compact 集合}, \displaystyle\int_K |f(x)|dx<\infty \end{array} \right\}$$

- $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ を 1 つ固定し

$$T_f(\varphi)=\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)dx \quad (\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N))$$

とおくと $T_f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ である．

命題 1.1

$f,g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ とする．$T_f=T_g$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ であれば $f=g$ a.e. $\mathbb{R}^N$ が成り立つ．

これは次の補題（証明略）からわかる．

補題 1.2

$f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ が

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\varphi dx=0 \quad ({}^\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N))$$

とする．このとき $f=0$ a.e. $\mathbb{R}^N$ である．

注 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ と T_f を同一視することにより f を超関数と見ることができる．

例３

- $\dfrac{1}{x}\notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ であるが

$$T(\varphi)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx \quad ({}^\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}))$$

とすると $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ である．

- 実際 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ とすると

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\\
=&\left\{[\log|x|\varphi(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon}-\int_{-\infty}^{-\varepsilon}(\log|x|)\varphi'(x)dx\right\}+\left\{[\log|x|\varphi(x)]_{\varepsilon}^{\infty}-\int_{\varepsilon}^{\infty}(\log|x|)\varphi'(x)dx\right\}\\
=&(\log\varepsilon)(\varphi(-\varepsilon)-\varphi(\varepsilon))-\int_{|x|\geq\varepsilon}(\log|x|)\varphi'(x)dx
\end{aligned}$$

- ここで $\mathrm{supp}\varphi \subset [-K, K]$ とすると

$$|\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)| \leq |\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)| + |\varphi(0) - \varphi(\varepsilon)| \leq 2 \sup_{x \in [-K,K]} |\varphi'(x)| \varepsilon$$

である．したがって $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \varepsilon = 0$ より $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\log \varepsilon)(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)) = 0$ を得る．

- 次に $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} (\log |x|) \varphi'(x) dx$ が収束することを示す．$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} (\log x) \varphi'(x) dx$ についてのみ示せば十分である．

- $(0, K]$ 上で

$$|(\log x) \varphi'(x)| \leq |\log x| \sup_{x \in [-K,K]} |\varphi'(x)|$$

であり $\int_0^K |\log x| dx < \infty$ より $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} (\log x) \varphi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{K} (\log x) \varphi'(x) dx$ は収束する．

- さらに

$$\left| \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} (\log |x|) \varphi'(x) dx \right| \leq \int_{-K}^{K} |\log |x|| dx \sup_{x \in [-K,K]} |\varphi'(x)|$$

である．

- 以上まとめると

$$|T(\varphi)| \leq \int_{-K}^{K} |\log |x|| dx \left(\sup_{x \in [-K,K]} |\varphi'(x)| \right)$$

であり，このことから $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ であることがすぐにわかる．この T を $\mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x}$ と表す．

命題 1.3

$T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, α を任意の多重指数とする．$T_\alpha : \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ を

$$T_\alpha(\varphi) := T(D^\alpha \varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N))$$

と定義すると $T_\alpha \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ である．

証明

- 線形性は D^α の線形性および $D^\alpha \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N))$ より明らか．

- $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ が

  $$\varphi_n \to \varphi\ (n \to \infty) \quad \text{in} \quad \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$$

  とする．このとき $D^\alpha \varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, $D^\alpha \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ であり次が成り立つ：

  $$D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi \quad (n \to \infty) \quad \text{in} \quad \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$$

- したがって

  $$T_\alpha(\varphi_n) = T(D^\alpha \varphi_n) \to T(D^\alpha \varphi) = T_\alpha(\varphi)$$

- 以上より $T_\alpha \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ である．

1.3 Ω 上の超関数

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合とするとき

  $$C_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}\varphi \text{ は } \Omega \text{ のコンパクト集合}\}$$

  と定義する．ここで $K \subset \mathbb{R}^N$ が開集合 Ω のコンパクト集合であるとは $K \subset \Omega$ であり，K が有界閉集合となることである．$C_0^\infty(\Omega)$ は $\mathscr{D}(\Omega)$ ともかかれる．

- $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(\Omega)$ が $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ に**収束する**とは次の２条件が成り立つことである；

  (i) ある Ω のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^N$ があって $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K({}^\forall n \in \mathbb{N})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ が成り立つ．

  (ii) 任意の多重指数 α に対して

  $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_n(x) - D^\alpha \varphi(x)| = 0$$

  が成り立つ．

  このとき $\varphi_n \to \varphi\ (n \to \infty)$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ と表す．

- $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ が **Ω 上の超関数**であるとは T が次の２条件を満たすことである：

  (i) T は線形である．

  (ii) $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(\Omega)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ が

  $$\varphi_n \to \varphi\ (n \to \infty) \quad \text{in} \quad \mathscr{D}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad T(\varphi_n) \to T(\varphi) \quad (n \to \infty)$$

  が成り立つ．

- Ω 上の超関数全体を $\mathscr{D}'(\Omega)$ と表す．

1.4 超関数の階数

命題 1.4

$T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ が $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ であるための必要十分条件は次の (i), (ii) が成り立つことである．

(i) T は線形である．

(ii) 任意の Ω のコンパクト集合 K に対して，ある $m = m(K) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とある $C = C(K) > 0$ が存在して

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \varphi| \quad {}^\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ with } \ \mathrm{supp}\varphi \subset K$$

注 K を Ω のコンパクト集合とするとき

$$C_0^\infty(K) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \mathrm{supp}\varphi \subset K\}$$

と表す．

証明 $T \in \mathscr{D}'(\Omega) \Rightarrow$ (i), (ii) を示す．

- (i) は $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ の定義に含まれている．
- (ii) が成り立たないとする．このとき，ある Ω のコンパクト集合 K が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，ある $\varphi_n \in C_0^\infty(K)$ が存在して

  $$|T(\varphi_n)| > n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_K |D^\alpha \varphi_n|$$

  が成り立つ．
- $\psi_n = \dfrac{\varphi_n}{T(\varphi_n)}$ とおくと $\psi_n \in C_0^\infty(K)$ であり $T(\psi_n) = 1$ が成り立つ．
- また

  $$\sum_{|\alpha| \leq n} \sup_K |D^\alpha \psi_n| \leq \frac{1}{n} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

  これは $\psi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ を意味するが，$T(\psi_n) = 1$ に矛盾する．□

次に (i), (ii) $\Rightarrow T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ を示す．

- T が線形であることは (i) そのものである．

- T の連続性を示そう．$\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(\Omega)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ が

$$\varphi_n \to \varphi \ \ (n \to \infty) \ \ \text{in} \ \ \mathscr{D}(\Omega)$$

とする．このとき，Ω のコンパクト集合 K が存在して

$$\text{supp}\varphi_n,\ \text{supp}\varphi \subset K$$

が成り立つ．

- (ii) より上の K に対し $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $C > 0$ が存在して

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \varphi| \ \ ({}^\forall \varphi \in C_0^\infty(K))$$

が成り立つ．

- 上の φ を $\varphi_n - \varphi$ として T と D^α の線形性より

$$|T(\varphi_n) - T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi| \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

したがって $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ $(n \to \infty)$ である．

- 以上より $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ である．□

定義

$T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ とする．このときある $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ が存在して，任意の Ω のコンパクト集合に対してある $C = C(K) > 0$ が存在して

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \ \ ({}^\forall \varphi \in C_0^\infty(K))$$

が成り立つとき，T は**階数有限**あるいは**有限位**の超関数という．さらに，このとき**階数**あるい**位数**は m 以下であるという．上の不等式が成立する最小の非負整数を T の**階数**あるいは**位数**という．

例 4 Dirac のデルタ関数は位数 0 である．実際，任意の $\mathbb{R}^N$ のコンパクト集合 K に対して

$$|T(\varphi)| = |\varphi(0)| \leq \sup_K |\varphi| \ \ ({}^\forall \varphi \in C_0^\infty(K))$$

が成り立つ．

例 5 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ に対して T_f は位数が 0 である．証明は演習問題とする．

例 6

- $\Omega = \mathbb{R}$ として

  $$T(\varphi) = \varphi'(0) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}))$$

  で定義すると $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ である（命題 1.3）.

- $K = [-1, 1]$ として

  $$|T(\varphi)| = |\varphi'(0)| \le \sum_{j=0,1} \sup_{x \in K} |\varphi^{(j)}(x)| \quad ({}^{\forall}\varphi \in C_0^\infty(K))$$

  である．したがって T の位数は 1 以下である．しかし，位数は 0 ではない．もし 0 であるとすると，ある $K = [-1, 1]$ に対して $C > 0$ が存在して

  $$|T(\varphi)| = |\varphi'(0)| \le C \sup_K |\varphi| \quad ({}^{\forall}\varphi \in C_0^\infty(K))$$

  が成り立つ．$\varphi'(0) = 1$ なる $\varphi \in C_0^\infty(K)$ を 1 つとり

  $$\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(nx)$$

  とする．このとき $\varphi_n \in C_0^\infty(K)$ で $\varphi_n'(0) = 1$ である．一方

  $$\sup_K |\varphi_n| = \frac{1}{n} \sup_K |\varphi|$$

  であるため

  $$|T(\varphi_n)| = |\varphi_n'(0)| = 1 \le C \sup_K |\varphi_n| = \frac{C}{n} \sup_K |\varphi|$$

  を得る．しかし $n \to \infty$ とすることにより矛盾となる．