

No.5 確率

確率の定義

偶然に支配される現象の例

- さいころを振って1の目が出る.
- 1本のくじを引いてあたりがでる.
- ある道路上で交通事故が起こる.
- コインを投げて表が出る.

このような現象の**起こりやすさ**の度合いを数値で表したものが**確率**である.

例1：さいころを振る

- 同じ状態のもとで繰り返すことのできる実験や観測：**試行 (trial)**
- 試行の結果としておこる事柄：**事象 (event)**
 - 「1の目が出る」
 - 「奇数の目が出る」
- 「奇数の目が出る」 → $\left\{ \begin{array}{l} \text{「1の目が出る」 「3の目が出る」} \\ \text{「5の目が出る」} \end{array} \right.$

それぞれもうこれ以上分けることができない：**根元事象**

- 根元事象：「1の目が出る」... 「6の目が出る」の6つ

正しく作られたさいころは1から6までの目が偏りなく出ることが期待される. このよう2つ以上の根元事象が同程度に起こると考えるならば, それらの事象は**同様に確からしい**という.

確率の定義

試行 T は N 個の根元事象からなり, それらは同様に確からしいとする. 事象 A の $n(A)$ 個の根元事象からなるとき, A の起こる**確率** $P(A)$ を次で定義する：
$$P(A) = \frac{n(A)}{N}$$

例2：コイン投げ

- 根元事象は「表が出る」「裏が出る」の2つで同様に確からしい
- 表が出る確率は $\frac{1}{2}$

例3：さいころ投げ

- 6つの根元事象は同様に確からしい
- 事象「奇数の目が出る」 → 「1の目が出る」, 「3の目が出る」, 「5の目が出る」

- 確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

例題 1

2枚の硬貨を投げるとき、2枚とも表である確率を求めよ

解 2枚の硬貨を A, B とする.

- (A, B) について根元事象は (表, 表), (表, 裏), (裏, 表), (裏, 裏) の4つであり同様に確からしい (と仮定する).
- 2枚とも表であるという事象の根元事象は1つ確率は $\frac{1}{4}$ である.

注 上の例題で根元事象を「表と表」, 「表と裏」, 「裏と裏」の3通りとするのは適切でない. 同様に確からしいとはいえなくなる.

- 試行 T の根元事象をすべて集めてできる集合を Ω で表し**標本空間**という. 根元事象は文字 ω で表す.
- 事象はいくつかの根元事象からなる, つまり, Ω の部分集合であり, A, B, \dots などの文字で表す.
- 事象 A, B の少なくとも1つが起こるという事象を $A \cup B$ で表し, A と B の**和事象**という. これは, 集合の言葉を用いると, A と B の和集合である. 同様に, 事象 A_1, \dots, A_n のうち少なくとも1つが起こるという事象を

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

で表す.

- 事象 A と B が同時に起こるという事象を $A \cap B$ で表し, A と B の**積事象**という. これは, 集合の言葉を用いると, A と B の和集合である. 同様に, 事象 A_1, \dots, A_n が同時に起こるという事象を

$$A_1 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

で表す.

- 事象 A に対して「 A が起こらない」という事象を A の**余事象**といい, A^c で表す.
- 「決して起こらない」ということも1つの事象と考え, 事象を**空事象**といい \emptyset で表す.
- $A \cap B = \emptyset$ であるとき A と B は**排反**であるという.

例 4: 1つのさいころを振るとき, ω_i を「 i の目が出る」という根元事象とする.

- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$
- 事象 A : 「奇数の目が出る」 $\rightarrow A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$

- 事象 B : 「3以上の目が出る」 $\rightarrow B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$
- $A \cap B = \{\omega_3, \omega_5\}$
- $A \cup B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$
- $\bar{A} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$

確率の基本性質

確率の基本性質

1. 任意の事象 A に対して $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$
3. 事象 A, B が互いに排反であるとき $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

例題 2

10本のくじの中に当たりくじが4本あるとき、これから3本引いて2本以上当たる確率を求めよ。

解

- 全事象 Ω の場合の数 $n(\Omega)$ は ${}_{10}C_3$
- 「2本以上当たる」
= 「ちょうど2本当たる」または「ちょうど3本当たる」(同時には起こらない)
- 2本当たるという事象を A , 3本当たるという事象を B とすると、求める確率は $P(A \cup B)$ である。

$$n(A) = {}_4C_2 \cdot {}_6C_1, n(B) = {}_4C_3 \quad P(A) = \frac{{}_4C_2 \cdot {}_6C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{3}{10}, \quad P(B) = \frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{30}$$

- A と B は互いに排反であるから

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{3}$$

余事象の確率

事象 $A \subset \Omega$ に対して A と \bar{A} は互いに排反な事象で $A \cup \bar{A} = \Omega$ であるから

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

したがって次が成り立つ：

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

例 5：2つのさいころを投げるとき、両方とも1の目である確率は $\frac{1}{36}$ である。

「両方とも1の目である」の余事象は「少なくとも一方が1の目でない」であるから、少なくとも一方が1の目でない確率は

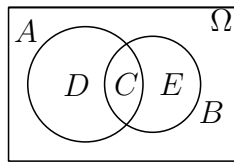
$$1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

である.

確率の加法定理

互いに排反とは限らない A, B に対して $P(A \cup B)$ を求める
 $A \cup B$ はつぎの3つの互いに排反な事象 C, D, E に分割される:

- $C = A \cap B$
- $D = A \cap \bar{B}$
- $E = \bar{A} \cap B$
- $C \cup D \cup E = A \cup B$



さらに $A = D \cup C, B = C \cup E$ であるから

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(C) + P(D) + P(E) \\ &= \{P(C) + P(D)\} + \{P(C) + P(E)\} - P(C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

確率の加法定理

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

例題 4

トランプ 52 枚をよく切って 1 枚抜くとき, ハートまたは絵札が出る確率を求めよ.

解 「ハートが出る」という事象を A , 「絵札が出る」という事象を B とする. (A, B は互いに排反ではない)

$$P(A) = \frac{13}{52} \left(= \frac{1}{4} \right), \quad P(B) = \frac{12}{52} \left(= \frac{3}{13} \right), \quad P(A \cap B) = \frac{3}{52}$$

よってハートまたは絵札が出る確率 $P(A \cup B)$ は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26} \quad \square$$