

No.12 (続き)

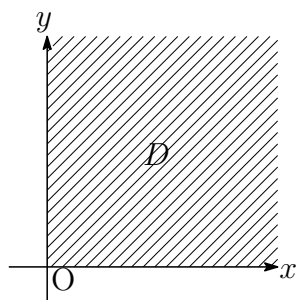
演習 1

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ を示せ.}$$

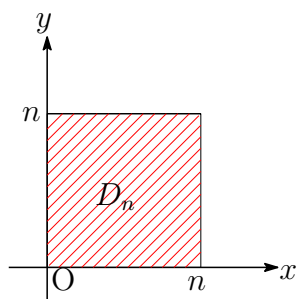
注 $F'(x) = e^{-x^2}$ となる関数 $F(x)$ は初等関数で表すことができない. $\rightarrow e^{-(x^2+y^2)}$ の二重積分を利用する.

解

- $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ とする.



- D の近似増加列として $D_n = [0, n] \times [0, n]$ をとると



$$\begin{aligned} \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^n \left\{ \int_0^n e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right\} dy \\ &= \left(\int_0^n e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^n e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

よって

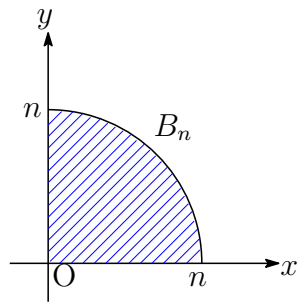
$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2$$

である.

- 次に D の近似増加列として

$$B_n = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

を考える.



- 極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ により B_n は

$$E_n = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq n, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

に対応するので

$$\begin{aligned} \iint_{B_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \iint_{E_n} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^n e^{-r^2} dr \right\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^n e^{-r^2} (-2r) dr \right\} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \left[e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=n} \right\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - e^{-n^2}) d\theta = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2}) \end{aligned}$$

- $e^{-(x^2+y^2)} \geq 0$ より

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4}$$

- したがって

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

つまり

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

演習 2

ガンマ関数とベータ関数は関係式

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

注

- $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ ($s > 0$)
 - $0 < s < 1$ のとき $e^{-x} x^{s-1}$ は $x = 0$ で特異性をもつ.
- $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ ($p, q > 0$)
 - $0 < p < 1$ のとき $x^{p-1} (1-x)^{q-1}$ は $x = 0$ で特異性をもつ.
 - $0 < q < 1$ のとき $x^{p-1} (1-x)^{q-1}$ は $x = 1$ で特異性をもつ.

解

- $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ ($s > 0$) において $x = t^2$ とおくと

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2(s-1)} \cdot 2t dt = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2s-1} dt$$
- $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ ($p, q > 0$) において $x = \cos^2 \theta$ とおくと ($\cos \theta \geq 0, \sin \theta \geq 0$ ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$))

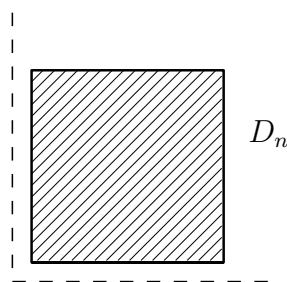
$$B(p, q) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{2(p-1)} \theta \sin^{2(q-1)} \theta (-2 \cos \theta \sin \theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta$$
- このとき $D = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ とおくと

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx \right) \left(2 \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1} dy \right) \\ &= 4 \left(\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1} dy \right) \\ &\stackrel{(i)}{=} 4 \iint_D e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy \end{aligned}$$
- ここで極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ により D は $E = \{(r, \theta) | r > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ に対応するので

$$\begin{aligned} & 4 \iint_D e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy \\ & \stackrel{(ii)}{=} 4 \iint_E e^{-r^2} (r^{2p-1} \cos^{2p-1} \theta) (r^{2q-1} \sin^{2q-1} \theta) r dr d\theta \\ &= 4 \iint_E e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta dr d\theta \\ &= \left(2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \right) \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \right) \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q) \end{aligned}$$

注

- (i) の part : $D = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ の近似増加列として $D_n = \left[\frac{1}{n}, n\right] \times \left[\frac{1}{n}, n\right]$ として



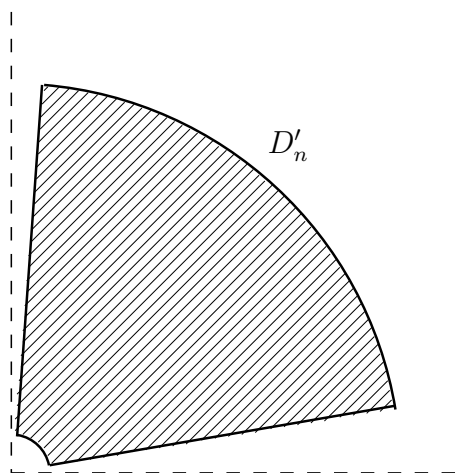
$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy = \left(\int_{\frac{1}{n}}^n e^{-x^2} x^{2p-1} dx \right) \left(\int_{\frac{1}{n}}^n e^{-y^2} y^{2q-1} dy \right)$$

であるので $n \rightarrow \infty$ とすればよい (関数がすべて非負なので, 広義積分については特定の近似増加列を取ればよい).

- (ii) の part : D の近似増加列として図のような D'_n をとる, 具体的には極座標で表したとき

$$E_n = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{1}{n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \leq r \leq n \right\}$$

となる領域である.



このとき

$$\begin{aligned} & \iint_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy \\ &= \iint_{E_n} e^{-r^2} (r^{2p-1} \cos^{2p-1} \theta) (r^{2q-1} \sin^{2q-1} \theta) r dr d\theta \\ &= \iint_{E_n} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta dr d\theta \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}} \left\{ \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta dr \right\} d\theta \\ &= \left(\int_{\frac{1}{n}}^n e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \right) \left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \right) \end{aligned}$$

この式で $n \rightarrow \infty$ とすればよい.