2024年度　微分方程式Ⅱ（担当：松澤　寛）　自己チェックシート　No.02

学科（コース）・プログラム__________　学籍番号____________　氏名________________

1. $I \subset \mathbb{R}$ とする．I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上の関数 $f(x)$ に各点収束することの定義を述べよ．
2. $I \subset \mathbb{R}$ とする．I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上の関数 $f(x)$ に一様収束することの定義を述べよ．
3. $I \subset \mathbb{R}$ とする．I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が Cauchy の条件を満たすとは？
4. $I \subset \mathbb{R}$ とする．I 上の関数 $f(x)$ が $x = x_0 \in I$ で連続であることの $\varepsilon - \delta$ 式定義を述べよ．
5. I 上の<u>連続</u>関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上の関数 $f(x)$ に一様収束するとき $f(x)$ は I で連続であることを示せ．
6. 一様収束について lim と積分記号が交換できることの定義を講義でやりました．正確な主張をもう一度書きなさい．
7. 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が一様収束することの定義を述べよ（必要であると思われるものは全て準備せよ）．
8. ワイエルシュトラスの M-テストを述べよ．
9. $[0,1]$ 上の関数列 $f_n(x) = nx(1-x)^n$ について以下の問に答えよ．
   (1) $\{f_n(x)\}$ は $[0,1]$ 上ある関数 $f(x)$ に各点収束する．$f(x)$ を求めよ (Hint: $|r| < 1$ ならば $nr^n \to 0$ $(n \to \infty)$).
   (2) $f_n(x) - f(x)$ の $[0,1]$ 上の最大値を求めよ．
   (3) $\{f_n(x)\}$ は $[0,1]$ 上 $f(x)$ に一様収束しないことを示せ (Hint: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$ $(n \to \infty)$).
10. $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + x^{2n}}$ を $\mathbb{R}$ 上で考える．連続関数列 $\{f_n(x)\}$ はある関数 $f(x)$ に各点収束する．$f(x)$ を見ることにより，$\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束しないことを示せ．
11. 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{n}x)}{n\sqrt{n}}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ．ただし $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ が収束する α の条件は証明せずに用いてよい．
11. べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径とは何か．
12. 次のべき級数の収束半径を求めよ．(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2 2^n}$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n} x^n$
13. べき級数の微分積分に関する命題を講義資料から抜き出し，書きなさい．
14. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ $(|x| < 1)$ で成り立つ．以下の問いに答えよ．
    (1) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ が $|x| < 1$ で表す関数を求めよ．
    (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ が $|x| < 1$ で表す関数を求めよ．