

2024年度 微分方程式Ⅱ (担当：松澤 寛) 自己チェックシート No.01

学科 (コース)・プログラム _____ 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. 2階の微分方程式 $y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x)$ について以下の問いに答えよ。

(1) 同次方程式 $y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ の基本解 u_1, u_2 が与えられているとき、非同次方程式の解を $y = z_1u_1 + z_2u_2$ とおく。 z_1', z_2' の条件式を2つ導け。

(2) z_1', z_2' を求め、そこから z_1, z_2 そして非同次方程式の解 y を求めよ。

2. 定数変化法を用いて $y'' - 2y' + y = e^x \log x$ の解を1つ求めよ。

3. 境界値問題

$$\begin{cases} y'' + q(x)y + r(x)y = f(x) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

を考える。ただし q, r は $[a, b]$ 上の有界で連続な関数で $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$ とする。

(1) この境界値問題が任意の f に対してただ1つの解をもつための必要十分条件を講義資料から抜き出し書きなさい。

(2) (1) の条件の下で、グリーン関数はどのように構成されますか？講義で述べた手順の要点をもう一度書きなさい。

4. 次の境界値問題のグリーン関数を3の手順で求めよ。

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

5. 次の境界値問題のグリーン関数を求めたい。以下の問いに答えよ。

$$y'' - y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

(1) 双曲線関数を $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ とおくとき $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$ であることを示せ。

(2) 上の境界値問題のグリーン関数を3の手順で求めよ。

6. Sturm-Liouville 型固有値問題

$$(p(x)y')' + \{q(x) + \lambda r(x)\}y = 0$$

を次の境界条件で考える：

$$\cos \alpha \cdot \varphi(a) - \sin \alpha \cdot p(a)\varphi'(a) = 0$$

$$\cos \beta \cdot \varphi(b) - \sin \beta \cdot p(b)\varphi'(b) = 0$$

(1) 固有値・固有関数とは何か述べよ。

(2) 固有値の存在定理をもう一度書きなさい。

(3) 固有関数の直交性とは何か。該当する定理を述べよ。

7. 次の Sturm-Liouville 型固有値問題の固有値と固有関数をすべて求めよ。

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$$