2024 年度　解析 III 演習 (担当：松澤　寛)　レジメ

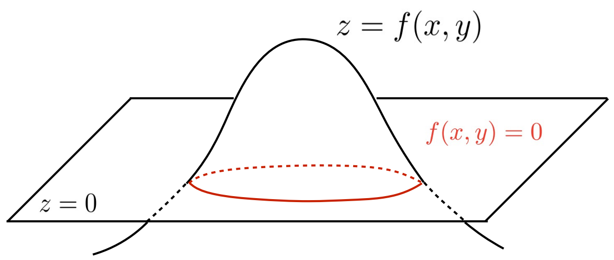
No.6　陰関数

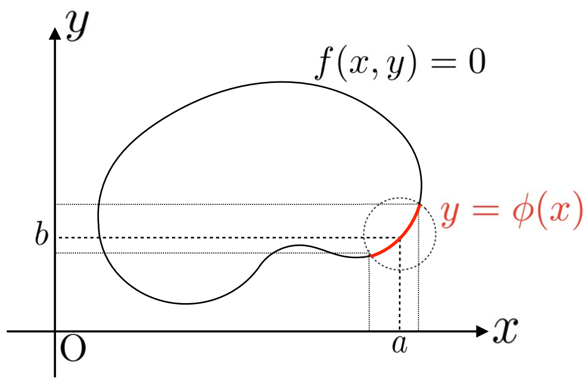
まとめ 1（陰関数とは）

- 変数 x と y の間に

$$f(x, y) = 0$$

で与えられる関係があるとき，x の変域と y の変域を適当に定めることにより，y が x の関数と考えることができる場合がある．これを，方程式 $f(x, y) = 0$ から定まる**陰関数**という．





- 一般的に方程式 $f(x, y) = 0$ は平面上の曲線を与える．曲線 $f(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) の「まわり」で曲線が 1 変数関数 $y = \phi(x)$ のグラフとなっているための十分条件を与えるのが**陰関数定理**である．

まとめ 2（陰関数定理 1）

- $f(x, y)$ を点 (a, b) を含む開集合で定義された C^1 級関数とする．
- $f(a, b) = 0$ (← 点 (a, b) が曲線 $f(x, y) = 0$ 上にあるということ) かつ $f_y(a, b) \neq 0$ ならば $x = a$ を含む開区間 I で次の性質をもつ関数 $y = \phi(x)$ がただ 1 つ定まる

(1) $b = \phi(a)$

(2) $f(x, \phi(x)) = 0 \ (x \in I)$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \phi'(x) = -\dfrac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \left(= -\dfrac{f_x(x, \phi(x))}{f_y(x, \phi(x))} \right)$

上の式は $f(x, \phi(x)) = 0$ の両辺を x で微分すれば合成関数の微分法より

$$f_x(x, \phi(x)) + f_y(x, \phi(x))\phi'(x) = 0$$

から得られる．

注

- $f_y(a,b)=0$ であっても $f_x(a,b)\neq 0$ であれば上の陰関数定理において x と y の立場を入れかえることにより $y=b$ を含む開区間 J で定義された関数 $x=\psi(y)$ で次の性質をもつものがただ1つ存在する：

  (1)′ $a=\psi(b)$

  (2)′ $f(\psi(y),y)=0\ (y\in J)$

  (3)′ $\dfrac{dx}{dy}=\psi'(x)=-\dfrac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)}\left(=-\dfrac{f_y(\psi(y),y)}{f_x(\psi(y),y)}\right)$

- 曲線 $f(x,y)=0$ 上の点で $f_x=f_y=0$ となる点を**特異点**という.

まとめ 3（接線）

- 曲線 $f(x,y)=0$ 上の点が特異点でなければ，その点のまわりで曲線は $y=\phi(x)$ or $x=\psi(y)$ の形で表され，接線が 1 本だけ引ける.

- 実際，$f(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$ であれば陰関数定理より，曲線 $f(x,y)=0$ は点 (a,b) のまわりで (1), (2), (3) を満たす関数 $y=\phi(x)$ のグラフとして表される。この曲線の点 (a,b) における接線の傾きは

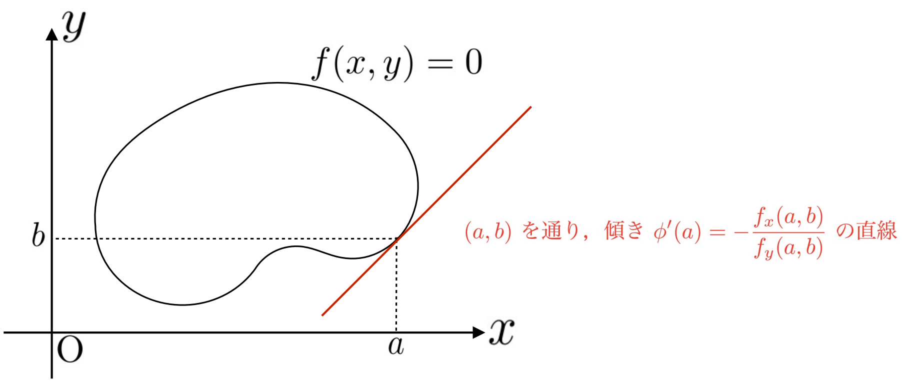
$$\phi'(a)=-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$$

  だから，この曲線の点 (a,b) における接線の方程式は

$$y-b=-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}(x-a)$$

$$\boldsymbol{f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0}$$

  ↑ $f_y(a,b)=0$ でも $f_x(a,b)\neq 0$ であれば同じ式が得られる



- $f(x,y,z)=0$ は一般に空間内の曲面を表す.

  例

  - $x^2+y^2+z^2-1=0$ （原点中心，半径 1 の球 (面)）
  - $ax+by+cz+d=0$ $((a,b,c)\neq(0,0,0))$
    （$\vec{n}=(a,b,c)$ を法線ベクトルとする平面）

- 曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点 (a,b,c) の「まわり」で曲面が 2 変数関数 $z=\phi(x,y)$ のグラフとして表されるための十分条件が次の version の陰関数定理である.

まとめ 4（陰関数定理 2）

- $f(x,y,z)$ は点 $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ を含む $\mathbb{R}^3$ の開集合で定義された C^1 級の関数とする.
- $f(a,b,c)=0,\ f_z(a,b,c)\neq 0$ ならば $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ を含む $\mathbb{R}^2$ のある開集合 U で定義された次の性質をもつ関数 $z=\phi(x,y)$ がただ 1 つ定まる：

  (1) $c=\phi(a,b)$

  (2) $f(x,y,\phi(x,y))=0$ $((x,y)\in U)$

  (3) $z=\phi(x,y)$ は C^1 級で

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\phi_x(x,y)=-\frac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}\left(=-\frac{f_x(x,y,\phi(x,y))}{f_z(x,y,\phi(x,y))}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\phi_y(x,y)=-\frac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}\left(=-\frac{f_y(x,y,\phi(x,y))}{f_z(x,y,\phi(x,y))}\right)$$

まとめ 5（接平面）

- $f(x,y,z)$ は点 (a,b,c) を含む $\mathbb{R}^3$ の開集合で C^1 級とする.
- 曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式は $f_x(a,b,c)$, $f_y(a,b,c)$, $f_z(a,b,c)$ のいずれかが 0 でなければ，次で与えられる：

$$\boldsymbol{f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,c)(z-c)=0}$$

演習 1

平面上の曲線 $y^2 = x^3 - x$ の点 $(2, \sqrt{6})$ における接線の方程式を求めよ．

$\boxed{\textbf{解}}$

$f(x, y) = y^2 - x^3 + x$ とおく．

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 1, \quad f_y(x, y) = 2y$$

より

$$f_x(2, \sqrt{6}) = -11, \ f_y(2, \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$$

よって求める接線の方程式は

$$\begin{aligned}
&(f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0) \\
&-11(x - 2) + 2\sqrt{6}(y - \sqrt{6}) = 0 \\
&11x - 2\sqrt{6}y - 10 = 0
\end{aligned}$$

演習 2

$f(x,y)$ を (a,b) の近傍で定義された C^2 級関数で，$f(a,b)=0,\ f_y(a,b)\neq 0$ とする．このとき (a,b) の近傍で $f(x,y)=0$ から定まる陰関数 $y=\phi(x)$ は 2 階微分可能であり $\phi''(x)$ は

$$\phi''(x) = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

で与えられることを示せ．ただし，右辺について (x,y) に $(x,\phi(x))$ が代入されているとする．

解 陰関数定理より $x=a$ を含む開集合 I で定義された関数 $y=\phi(x)$ で

- $b=\phi(a)$
- $f(x,\phi(x))=0\ (x\in I)$
- $\phi\in C^1(I)$ で

$$\frac{dy}{dx} = \phi'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{f_x(x,\phi(x))}{f_y(x,\phi(x))} \cdots ①$$

①の両辺を x で微分すると

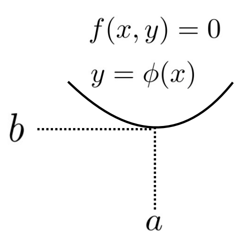
$$\begin{aligned}
\phi''(x) &= -\frac{\left[\dfrac{d}{dx}f_x\right]f_y - f_x\left[\dfrac{d}{dx}f_y\right]}{f_y^2} \quad \leftarrow \frac{d}{dx}f_x(x,\phi(x)) = f_{xx}(x,\phi(x)) + f_{xy}(x,\phi(x))\phi'(x)\ (\text{合成関数の微分}) \\
&= -\frac{[f_{xx}+f_{xy}\phi']f_y - f_x[f_{yx}+f_{yy}\phi']}{f_y^2} \quad \leftarrow \phi' = -\frac{f_x}{f_y} \\
&= -\frac{\left[f_{xx}+f_{xy}\left(-\dfrac{f_x}{f_y}\right)\right]f_y - f_x\left[f_{yx}+f_{yy}\left(-\dfrac{f_x}{f_y}\right)\right]}{f_y^2} \quad \leftarrow \text{分母分子に } f_y \text{ をかける} \\
&= -\frac{f_{xx}f_y^2 - f_{xy}f_xf_y - f_{yx}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3} \quad \leftarrow f_{xy} = f_{yx} \\
&= -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}
\end{aligned}$$

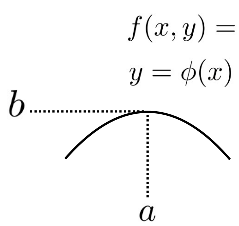
注 $f_y(a,b)\neq 0$ のとき $\phi'(a)=0 \Leftrightarrow f_x(a,b)=0$ だから，このとき

$$\phi''(a) = -\frac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)}$$

よって

- $\phi''(a) = -\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)} > 0 \Rightarrow$ 極小
- $\phi''(a) = -\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)} < 0 \Rightarrow$ 極大





演習 3

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=3 \quad (a,b,c>0)$$

で表される曲面の点 (a,b,c) における接平面の方程式を求めよ.

$\boxed{\text{解}}$

$f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-3$ とおく.

$$f_x(x,y,z)=2\frac{x}{a^2},\quad f_y(x,y,z)=2\frac{y}{b^2},\quad f_z(x,y,z)=2\frac{z}{c^2}$$

より

$$f_x(a,b,c)=\frac{2}{a},\ f_y(a,b,c)=\frac{2}{b},\ f_z(a,b,c)=\frac{2}{c}$$

よって求める接平面の方程式は

$$\begin{aligned}
&(f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,c)(z-c)=0)\\
&\frac{2}{a}(x-a)+\frac{2}{b}(y-c)+\frac{2}{c}(z-c)=0\\
&\frac{2}{a}x+\frac{2}{b}y+\frac{2}{c}z=6\\
&\frac{1}{a}x+\frac{1}{b}z+\frac{1}{c}z=3\\
&bcx+cay+abz=3abc
\end{aligned}$$