2024年度　解析Ⅲ演習 (担当：松澤　寛)　レジメ

No.3　全微分

復習（1 変数関数の微分可能性）

- $x = a$ の近傍で定義された関数 $f = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとは

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

　が存在することであった．これを言い換えると

- ある実数 A があって

$$\lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A \right\} = 0$$

　が成り立つことで，このとき $A = f'(a)$ と書くのであった．

- 書き換えると

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \{f(a) + A(x - a)\}}{x - a} = 0$$

　であるから

- $f = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとは，ある実数 A があって

$$g(x) = f(x) - \{f(a) + A(x - a)\}$$

　とおくと

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{x - a} = 0$$

　が成り立つことであるといいかえることができる．

- このとき，$A = f'(a)$ であり，直線 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ を曲線 $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における**接線**というのであった．

まとめ 1（全微分可能性）

- 関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) のある近傍で定義されているとする．
  $f(x,y)$ が点 (a,b) で**全微分可能**であるとは，ある $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ があって

$$g(x,y) := f(x,y) - \{f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b)\}$$

  が

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

  を満たすことである．

- f が点 (a,b) で全微分可能ならば
  - f は点 (a,b) で連続
  - f は点 (a,b) で $x,\ y$ について偏微分可能で

$$\alpha = f_x(a,b), \quad \beta = f_y(a,b)$$

まとめ 2（全微分可能性の十分条件）

関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近傍で $x,\ y$ について偏微分可能で，偏導関数 $f_x,\ f_y$ のいずれかが点 (a,b) で連続であれば $f(x,y)$ は点 (a,b) で全微分可能である．

まとめ 3（接平面）

関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であるとき平面

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-y) + f_y(a,b)(y-b)$$

を曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(a,b,f(a,b))$ における**接平面**という．

演習 1

関数 $f(x,y)=|xy|^{\alpha}$ $(\alpha>1/2)$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で x, y について偏微分可能であることを証明せよ．

(2) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で全微分可能であることを証明せよ．

証明

(1) 任意の $h\neq 0$ に対して，$f(0+h,0)=0$ であるから

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

よって

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

したがって f は点 $(0,0)$ で x について偏微分可能で，$f_x(0,0)=0$ である．

全く同様にして，f は点 $(0,0)$ で y について偏微分可能で，$f_y(0,0)=0$ である．

(2) $g(x,y)$ を

$$g(x,y)=f(x,y)-\{f(0,0)+f_x(0,0)(x-0)+f_y(0,0)(y-0)\}$$

とおくと $g(x,y)=|xy|^{\alpha}-\{0+0(x-0)+0(y-0)\}=|xy|^{\alpha}$ である．

$$\frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=\frac{|xy|^{\alpha}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

について，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと

$$0\leq\frac{|xy|^{\alpha}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|r^2\cos\theta\sin\theta|^{\alpha}}{r}\leq r^{2\alpha-1}$$

である．$\alpha>1/2$ より $2\alpha-1>0$ である．$(x,y)\to 0$ のとき $r\to 0$ であるから

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|^{\alpha}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

よって $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で全微分可能である．

演習 2

a, b を正の定数とする．曲面 $z = \sqrt{3 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$ 上の点 $(a, b, 1)$ における接平面の方程式を求めよ．

解

- $f(x,y) = \sqrt{3 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$ とおく．
- $f(a,b) = 1$
- $f(x,y) = \left(3 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}$ より

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{2}\left(3 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}\left(-\frac{2x}{a^2}\right) \\ &= -\frac{x}{a^2\sqrt{3 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}} \end{aligned}$$

- 同様にして

$$f_x = -\frac{y}{b^2\sqrt{3 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}}$$

- $f_x(a,b) = -\dfrac{1}{a}$, $f_y(a,b) = -\dfrac{1}{b}$ であるから求める方程式は

$$\begin{aligned} &z = 1 + \left(-\frac{1}{a}\right)(x-a) + \left(-\frac{1}{b}\right)(x-b) \\ &\boldsymbol{\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + z = 3} \end{aligned}$$