

No.2 偏導関数

まとめ1 (偏微分係数)

- 関数 $z = f(x, y)$ は点 (a, b) のある近傍で定義されているとする。
- $y = b$ と固定すると $z = f(x, b)$ は x の関数 (1変数関数) である。これが $x = a$ で微分可能, つまり

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

が存在するとき, $f(x, y)$ は点 (a, b) で x について**偏微分可能**であるという。この極限値を

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b), \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_x(a, b), \quad z_x(a, b)$$

などと表し, 点 (a, b) における x についての**偏微分係数**という。

- y について偏微分可能, y についての偏微分係数も同様に定義され, 次のように表す:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(a, b), \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_y(a, b), \quad z_y(a, b)$$

まとめ2 (偏導関数)

- $f(x, y)$ はある開集合 D で定義されているとする。
- $f(x, y)$ が D の各点 (x, y) で x について偏微分可能であるとき, D 上で

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

が定義される。この関数を $f(x, y)$ の x についての**偏導関数**といい

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_x(x, y), \quad f_x, \quad z_x$$

などと表す。

- y についての偏導関数も同様に定義され

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_y(x, y), \quad f_y, \quad z_y$$

などと表す。

- x (or y) について偏導関数を求めることを x (or y) で**偏微分する**という。
- 偏微分の計算は片方の変数を定数と考え, 1変数関数の微分と同様に行う。

まとめ3 (高次偏導関数)

$z = f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ がさらに x, y について偏微分可能であるとき, その偏導関数を $f(x, y)$ の**第2次偏導関数**といい, 次のように表す:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = z_{xx}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = z_{yx}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = z_{xy}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = z_{yy},\end{aligned}$$

まとめ4 (偏微分の順序)

点 (a, b) の近傍で f_{xy}, f_{yx} が存在し, とともに (a, b) で連続であるならば

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

さらに, f_{xy}, f_{yx} がともに D で連続であるならば D 上で

$$f_{xy} = f_{yx}$$

が成り立つ.

演習 1

次の関数について、偏導関数、第2次偏導関数を求めよ。

(1) $z = e^{2x} \sin 2y$

(2) $z = \log(x^2 + y^2)$

証明

(1)

$$z_x = (e^{2x})_x \sin 2y = 2e^{2x} \sin 2y$$

$$z_y = e^{2x}(\sin 2y)_y = e^{2x}(2 \cos 2y) = 2e^{2x} \cos 2y$$

$$z_{xx} = 2(e^{2x})_x \sin 2y = 4e^{2x} \sin 2y$$

$$z_{xy} = 2e^{2x}(\sin 2y)_y = 2e^{2x}(2 \cos 2y) = 4e^{2x} \cos 2y$$

$$z_{yx} = 2(e^{2x})_x \cos 2y = 4e^{2x} \cos 2y$$

$$z_{yy} = 2e^{2x}(\cos 2y)_y = 2e^{2x}(-2 \sin 2y) = -4e^{2x} \sin 2y \quad //$$

(2)

$$z_x = \frac{(x^2 + y^2)_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$z_y = \frac{(x^2 + y^2)_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$z_{xx} = \frac{(2x)_x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 + y^2)_x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$z_{xy} = 2x \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)_y = 2x \left\{ -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \right\} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z_{yx} = 2y \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)_x = 2y \left\{ -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \right\} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z_{yy} = \frac{(2y)_y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 + y^2)_y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad //$$

演習 2

次の関数は点 $(0, 0)$ において x, y について偏微分可能であるが、点 $(0, 0)$ で連続でないことを証明せよ。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

解 任意の $h \neq 0$ に対して

$$f(0 + h, 0) = \frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} = 0, \quad f(0, 0 + h) = \frac{0 \cdot h}{0^2 + h^2} = 0$$

であるので

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

よって

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

したがって f は点 $(0, 0)$ で偏微分可能であり、 $f_x(0, 0) = 0$ 、 $f_y(0, 0) = 0$ である。

一方、 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ は存在しない。

実際、直線 $y = x$ 上（原点以外）では

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

よって直線 $y = x$ に沿って点 (x, y) を点 $(0, 0)$ に近づけると $f(x, y)$ の値は $\frac{1}{2}$ に近づく。

一方、直線 $y = 0$ 上（原点以外）では

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$$

よって直線 $y = 0$ に沿って点 (x, y) を点 $(0, 0)$ に近づけると $f(x, y)$ の値は 0 に近づく。

以上より $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ は存在しないので f は点 $(0, 0)$ で連続ではない。 //