

2024年度 解析Ⅲ演習 (担当: 松澤 寛) プリント No.2

学科 (コース)・プログラム _____ 学籍番号 _____ 氏名 _____

1. 次の関数の偏導関数, 第2次偏導関数を全て求めよ.

$$\begin{array}{ll} (1) z = x^3y^2 + 3x^2y^2 & (2) z = \sin(xy) \\ (3) z = e^{x^2-y^2} & (4) z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ (5) z = e^{\frac{y}{x}} & (6) z = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{array}$$

2. $z = x^y$ のとき z_x, z_y を求めよ (Hint: $\log z$ を考える).

3. $H(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ とするとき $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ を満たすことを計算で確かめよ. この方程式を**熱方程式**という.

4. 3変数関数 $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ に対して $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を求めよ.

5. 関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) $f_x(0, 0)$ を求めよ. (Hint: $f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h}$ でしたね. $f(0, 0) = 0$ ですが $f(0+h, 0) = ?$. $h \neq 0$ ですから場合分けの上の式を使う.)

(2) $y \neq 0$ のとき $f_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, y) - f(0, y)}{h}$ を求めよ.

(Hint: $y \neq 0, h \neq 0$ だから $f(0+h, y) = f(h, y) = ?$, $f(0, y) = ?$. $(h, y), (0, y) \neq (0, 0)$ ですから場合分けの上の式を使う.)

(3) $f_y(0, 0)$ を求めよ. (Hint: (1) と同じ)

(4) $x \neq 0$ のとき $f_y(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, 0+h) - f(x, 0)}{h}$ を求めよ. ((2) と同じ)

(5) $f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, 0+h) - f_x(0, 0)}{h}$ を求めよ. (Hint: $f_x(0, 0+h) = f_x(0, h)$ は (2) の結果を, $f_x(0, 0)$ は (1) の結果を使う)

(6) $f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(0+h, 0) - f_y(0, 0)}{h}$ を求めよ. (Hint: $f_y(0+h, 0) = f_y(h, 0)$ は (4) の結果を, $f_y(0, 0)$ は (3) の結果を使う)