

2024年度 解析Ⅲ演習 (担当: 松澤 寛) プリント No.01

学科 (コース)・プログラム \_\_\_\_\_ 学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

1. 次の極限值が存在するかどうかを調べよ. 存在するときにはその極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Hint(3):  $y = mx^2$  に沿って  $(x, y)$  を  $(0, 0)$  に近づけてみよ. つまり  $y = mx^2$  として  $\lim_{x \rightarrow 0}$  としてみよ.

2. 次の問いに答えよ.

(1)  $0 \leq t \leq \pi$  に対して  $|\sin t| \leq |t|$  が成り立つことを証明せよ. ( $0 \leq t \leq \pi$  なので  $\sin t \leq t$  を示せばよい).

(2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{|x| + |y|} = 0$  を証明せよ.

Hint (2): 分母の  $|x| + |y|$  について  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$  が成り立つことを利用せよ.

3. 1(3) を参考にして次の極限值が存在しないことを証明せよ.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{3x^2 + y^6}$$

4. 次の問いに答えよ.

(1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\sin x)(\tan y)}{\sin^2 x + \sin^2 y}$  は存在しないことを証明せよ.

(2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \tan^{-1} \frac{y}{x} = 0$  であることを証明せよ.

Hint (1): 2通りの近づけ方をしてみる.

Hint (2):  $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$  と  $\tan^{-1} \theta$  の値域に注意

5. 次の関数は点  $(0, 0)$  で連続であるかどうか調べよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

$$(3) f(x, y) = \begin{cases} xy \log(x^2 + y^2) & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$