

# 2023年度 解析III演習(担当:松澤 寛) レジメ

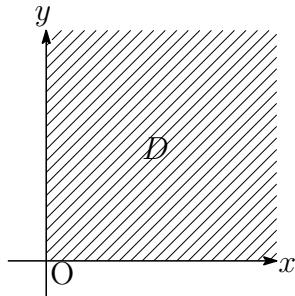
## 第12回 (続き)

### 演習1

$D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  のとき

$$\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4} dx dy$$

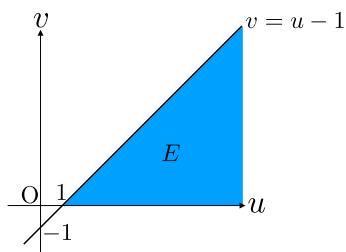
を求めよ.



### 解

- $\begin{cases} x+y+1 &= u \\ y &= v \end{cases}$  とおくと  $\begin{cases} x &= u-v-1 \\ y &= v \end{cases}$   
 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v-1 \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq v \leq u-1$

より  $D$  は  $E = \{(u, v) | u \geq 1, 0 \leq v \leq u-1\}$  と対応する.



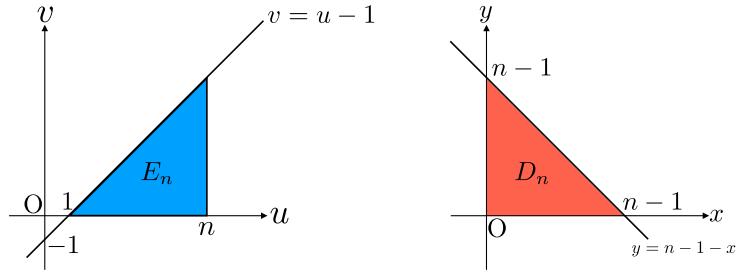
- $E$  の近似増加列として

$$E_n = \{(u, v) | 1 \leq u \leq n, 0 \leq v \leq u-1\}$$

とおくと  $E_n$  は

$$D_n = \{(x, y) | 0 \leq x \leq n-1, 0 \leq y \leq n-1-x\}$$

と対応する.



$$\left( \begin{array}{l} \bullet \quad 1 \leq u \leq n \Leftrightarrow 0 \leq x + y \leq n - 1 \Leftrightarrow -x \leq y \leq n - 1 - x \\ \bullet \quad v \leq u - 1 \Leftrightarrow x \geq 0 \\ \bullet \quad v \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0 \end{array} \right)$$

- 次に

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- $D_n$  は  $D$  の近似増加列で  $\frac{1}{(x+y+1)^4} \geq 0$  より

$$\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4} dxdy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{1}{(x+y+1)^4} dxdy$$

- ここで

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{1}{(x+y+1)^4} dxdy &= \iint_{E_n} \frac{1}{u^4} |J| dudv \\ &= \int_1^n \left\{ \frac{1}{u^4} dv \right\} du = \int_1^n \left[ \frac{v}{u^4} \right]_{v=0}^{v=u-1} du \\ &= \int_1^n \frac{u-1}{u^4} du = \int_1^n \left\{ \frac{1}{u^3} - \frac{1}{u^4} \right\} du \\ &= \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u^3} \right]_1^n = \left( -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \right) - \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \rightarrow \frac{1}{6} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

- したがって  $\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4} dxdy = \frac{1}{6}$

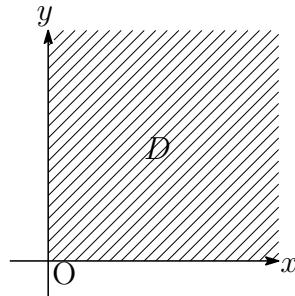
演習2

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

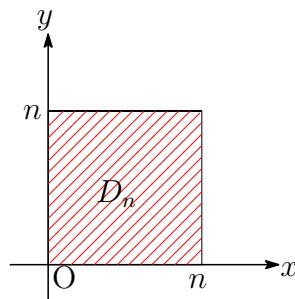
**注**  $F'(x) = e^{-x^2}$  となる関数  $F(x)$  は初等関数で表すことができない.  $\rightarrow e^{-(x^2+y^2)}$  の二重積分を利用する.

**解**

- $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  とする.



- $D$  の近似増加列として  $D_n = [0, n] \times [0, n]$  をとると



$$\begin{aligned} \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy &= \int_0^n \left\{ \int_0^n e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right\} dy \\ &= \left( \int_0^n e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^n e^{-y^2} dy \right) = \left( \int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

よって

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2$$

である.

- 次に

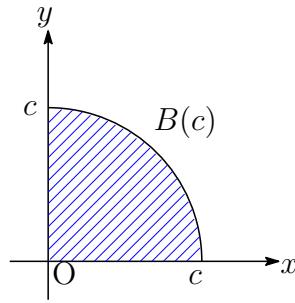
$$B(c) = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq c^2\} \quad (c > 0)$$

とおく.

- 極座標変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  により  $B(c)$  は

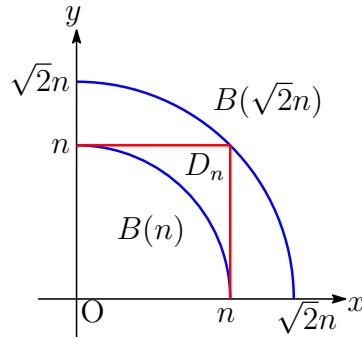
$$F(c) = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq c, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

に対応するので



$$\begin{aligned}
\iint_{B(c)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \iint_{F(c)} e^{-r^2} r dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^c e^{-r^2} dr \right\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^c e^{-r^2} (-2r) dr \right\} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \left[ e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=c} \right\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - e^{-c^2}) d\theta = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-c^2})
\end{aligned}$$

- $n = 1, 2, \dots$  に対して  $B(n) \subset D_n \subset B(\sqrt{2}n)$  で  $e^{-(x^2+y^2)} \geq 0$  より



$$\iint_{B(n)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{B(\sqrt{2}n)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

- よって

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2}) \leq \left( \int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2n^2})$$

- $n \rightarrow \infty$  とすると

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2}) \rightarrow 0, \quad \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2n^2}) \rightarrow 0, \quad \int_0^n e^{-x^2} dx \rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

であるので

$$\frac{\pi}{4} \leq \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4}$$

したがって  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

### 演習3

ガンマ関数とベータ関数は関係式

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

#### 注

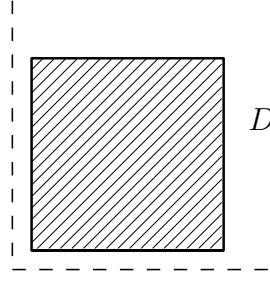
- $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \ (s > 0)$ 
  - $0 < s < 1$  のとき  $e^{-x} x^{s-1}$  は  $x = 0$  で特異性をもつ.
- $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \ (p, q > 0)$ 
  - $0 < p < 1$  のとき  $x^{p-1} (1-x)^{q-1}$  は  $x = 0$  で特異性をもつ.
  - $0 < q < 1$  のとき  $x^{p-1} (1-x)^{q-1}$  は  $x = 1$  で特異性をもつ.

#### 解

- $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \ (s > 0)$  において  $x = t^2$  とおくと
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2(s-1)} \cdot 2t dt = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2s-1} dt$$
- $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \ (p, q > 0)$  において  $x = \cos^2 \theta$  とおくと ( $\cos \theta \geq 0, \sin \theta \geq 0$  ( $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ))
$$B(p, q) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{2(p-1)} \theta \sin^{2(q-1)} \theta (-2 \cos \theta \sin \theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta$$
- このとき  $D = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$  とおくと
$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left( 2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx \right) \left( 2 \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1} dy \right) \\ &= 4 \left( \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx \right) \left( \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1} dy \right) \\ &\stackrel{(i)}{=} 4 \iint_D e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy \end{aligned}$$
- ここで極座標変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  により  $D$  は  $E = \{(r, \theta) | r > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$  に対応するので
$$\begin{aligned} &4 \iint_D e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy \\ &\stackrel{(ii)}{=} 4 \iint_E e^{-r^2} (r^{2p-1} \cos^{2p-1} \theta) (r^{2q-1} \sin^{2q-1} \theta) r dr d\theta \\ &= 4 \iint_E e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta dr d\theta \\ &= \left( 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \right) \left( 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \right) \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q) \end{aligned}$$

注

- (i) の part :  $D = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$  の近似増加列として  $D_n = \left[\frac{1}{n}, n\right] \times \left[\frac{1}{n}, n\right]$  として



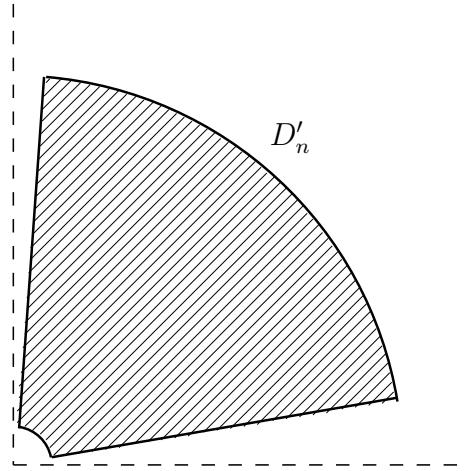
$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy = \left( \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-x^2} x^{2p-1} dx \right) \left( \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-y^2} y^{2q-1} dy \right)$$

であるので  $n \rightarrow \infty$  とすればよい（関数がすべて非負なので、広義積分については特定の近似増加列を取ればよい）。

- (ii) の part :  $D$  の近似増加列として図のような  $D'_n$  をとる、具体的には極座標で表したとき

$$E_n = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{1}{n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \leq r \leq n \right\}$$

となる領域である。



このとき

$$\begin{aligned} & \iint_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy \\ &= \iint_{E_n} e^{-r^2} (r^{2p-1} \cos^{2p-1} \theta) (r^{2q-1} \sin^{2q-1} \theta) r dr d\theta \\ &= \iint_{E_n} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta dr d\theta \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \left\{ \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta dr \right\} d\theta \\ &= \left( \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \right) \left( \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \right) \end{aligned}$$

この式で  $n \rightarrow \infty$  とすればよい。