

2023年度 解析III演習(担当:松澤 寛) レジメ

第1回 2変数関数の極限

まとめ1 (2変数関数)

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, $M \subset \mathbb{R}^2$ とする.
- 各 $(x, y) \in M$ に対してただ1つの $z \in \mathbb{R}$ が定まる時 z は M 上で定義された (x, y) の **2変数関数**といい, $z = f(x, y)$ と表す. M を $f(x, y)$ の**定義域**という.
- \mathbb{R}^3 の部分集合 $\{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in M\}$ を関数 $f(x, y)$ の**グラフ**という. 2変数関数のグラフは一般的に \mathbb{R}^3 内の曲面である.

まとめ2 (2変数関数の極限)

- $f(x, y)$ は点 $P(a, b)$ の近傍 $U_\varepsilon(P)$ (の P 以外) つまり $U_\varepsilon(P) \setminus \{P\}$ で定義されているとする ($P(a, b)$ で定義されている必要はない).
- 点 (x, y) が点 (a, b) に限りなく近づくとき, $f(x, y)$ が一定の値 l に限りなく近づくならば (x, y) が (a, b) に近づくとき, $f(x, y)$ の**極限値**は l であるといい,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l, \quad f(x, y) \rightarrow l \quad (\text{as } (x, y) \rightarrow (a, b))$$

などとかく.

- $\varepsilon - \delta$ 式の定義は次の通りである:

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$$

が成り立つ.

- 次が成り立つ: $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l, \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = m$ の時

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \{f(x, y) + g(x, y)\} = l + m$$

$$(2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)g(x, y) = lm \text{ 特に } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} cf(x, y) = cl \text{ (} c \text{ は定数)}$$

$$(3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{l}{m} \text{ (ただし } m \neq 0 \text{)}$$

まとめ3 (関数の連続性)

- 関数 $f(x, y)$ が

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

が成り立つとき, $f(x, y)$ は点 (a, b) で連続であるといふ.

- $\varepsilon - \delta$ 式定義は次の通りである： $f(x, y)$ が $M \subset \mathbb{R}^2$ で定義されており、 $(a, b) \in M$ で連続であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して

$$(x, y) \in M, \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$$

が成り立つことである。

- $f(x, y)$ が M 上の各点で連続であるとき、 $f(x, y)$ は M で連続であるという。

まとめ4 (有界・開集合・閉集合)

$M \subset \mathbb{R}^2$ (\mathbb{R}^n でも OK) とする。

- ある $R > 0$ があって $M \subset U_R(O)$ (O は原点) とできるとき M は**有界**であるという。
- 任意の $(x, y) \in M$ に対してある $\varepsilon > 0$ があって、 $U_\varepsilon((x, y)) \subset M$ とできるとき、 M は**開集合**であるという。
- $M = G^c$ (G : 開集合) と書けるとき、 M は**閉集合**であるという。
- Weierstrass の**最大値定理**：有界な閉集合 M で定義された連続関数は M で最大値と最小値をとる。

演習 1

次の極限値が存在するかどうか調べよ。存在するときは極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

証明

(1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと

$$\frac{2x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{2r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} = 2r \cos^2 \theta \sin \theta$$

より

$$\left| \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} \right| = |2r \cos^2 \theta \sin \theta| \leq 2r$$

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$ は $r \rightarrow 0$ と同じことなので $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} = 0$ である。

注 $\varepsilon - \delta$ 式には

$$\left| \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq 2r$$

より、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $\delta = \varepsilon/2$ とすれば、($r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$ だから)

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq 2r < 2\delta = \varepsilon$$

が成り立つ。よって $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} = 0$ が成り立つ。

(2)

同じように考えると $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r^2} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ である。 r がな
く θ だけ $\rightarrow \theta$ により値が異なる \rightarrow 極限値が存在しないのでは？

- 直線 $y = x$ 上（原点以外）では $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$ なので、直線 $y = x$ に沿って $(0, 0)$ に近づけると 0 に近づく。
- 直線 $y = 0$ 上（原点以外）では $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1$ なので、直線 $y = 0$ に沿って $(0, 0)$ に近づけると 1 に近づく。

以上より極限値は存在しない。

注

- 極限値が存在しないことを示すには、2通りの近づけ方で異なる値に近づくことを示せばよい。

- 極座標で表したとき, $r \rightarrow 0$ のとき $g(r) \rightarrow 0$ となる r だけの関数を用いて

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq g(r)$$

のような不等式が作れてやつと $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ と結論づけられる。極座標を用いて $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ を証明するためには上のような不等式を必ず作る。

演習2

次の関数は点 $(0, 0)$ で連続であるか

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

解 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ を調べる。

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと $r \neq 0$ のとき

$$xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = r^2 \cos \theta \sin \theta \sin \frac{1}{r}$$

であり, $\left| \sin \frac{1}{r} \right| \leq 1$ より

$$\left| xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq r^2$$

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $r \rightarrow 0$ であるから

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

つまり

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

である。よって $(0, 0)$ で連続である。