Science Journal of Kanagawa University **33**：5-13 (2022)

■原　著■

ヴァイオリンを A 音からチューニングする根拠の理解

青木　孝[1,2]

Understanding Why the Violinis Tuned from A Pitch

Takashi Aoki[1,2]

[1] Department of Mathematics and Physics, Fuculty of Science, Kanagawa University, Hiratsuka City, Kanagawa 259-1293, Japan
[2] To whom correspondence should be addressed, E-mail: ul7aok@kanagawa-u.ac.jp

Abstract: The understanding of why was the violin is tuned from A pitch was studied. It waa noted that the understanding is based on the historical process of the violin.
Keywords: Violin, tuning, harmony, mean temperament, combination tone, Pythagoras

序論

報告者は、物理学実験Ｉの課題の１つ「音速の測定とリサージュ図形の観測」実験を担当していた。その実験の導入にあたり、音波の周波数に関連した、音律と音階の物理についても説明していた。学生の数人は、身近な音楽と、身近でない物理との１つの結びつきに驚き関心を示す。そこに意義も感じ続けているが、説明をしながらも、「なぜ、A 音からチューニングするのか？」という疑問がいつも付きまとっていた。そこで、調べることにしたわけである。その結果、300 年前には完成形となったヴァイオリン系楽器を A 音からチューニングする根拠について、現代のヴァイオリン系楽器が、歴史上の到達点であるという観点と、音律の変遷を照らし合わせ、その関係性から納得できる理解を得ることができたので報告し、学生への補足とする。

表 1. 西洋と日本の音階

ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	(ド)
C	D	E	F	G	A	B	(C)
ハ	ニ	ホ	ヘ	ト	イ	ロ	(ハ)

音階は、ドレミファソラシ（ド）の 7 音からなる。音名は、英米式では、ドを記号 C として、ラの A から始まり一巡する。日本では、表 1 の下段として対応させる。音域上､中央の C を C4 として､1 オクターブ上の C は C5 と表記する。したがって、A 音は A4 となる。C4 ～ C5 は、なじみ深くハ長調と呼ばれ、近代音楽では基本となっているが、C4 音からではなく、この A4 音を、一般的に、1939 年ロンドン国際会議で決められた 440 Hz としてチューニングする。17 世紀から 18 世紀のバッハに代表されるバロック音楽では、A4 音のピッチが 435 Hz であったとされ、まさに 1891 年において国際 A4 ピッチは、435 Hz と決められていた。時代により、A4 音の周波数は変遷するが、チューニングの基準は音階ラであり、その音名を A としていることに、歴史的必然があることが理解できたので報告する。

方法

倍音の解析

倍音は、マラン・メルセンヌにより、1636 年に発見された。それと同時に、後述の平均律も、ほぼ完璧に記述している。倍音は､1 オクターブが基本となる。C4 と C5 の周波数比は､2 倍となる（2 の倍数系列)。C4 の音に調弦した開放弦長を l とすれば、C5 は弦長を $\frac{l}{2}$ にして弾けばよい。以降、3 倍音、4 倍音（2 オクターブ上）等は、表 2 となる。2 倍音 C5 と 3 倍音 G5 の周波数比は、$\frac{G5}{C5}=\frac{3}{2}$ で完全 5 度の音程という。C4 の開放弦長を l とし、C5 の弦長を$l5(l5=\frac{l}{2})$ とすれば、G5 は、弦長を $\frac{2}{3}l5$（3 の倍数系列）$(=\frac{l}{3})$ として弾く音と同じである。

表 2. 調和律（純正律）

	1	2	$3(2\cdot\frac{3}{2})$	4	$5(4\cdot\frac{5}{4})$	6
トーン	C4	C5	G5	C6	E6	G6
弦長	l	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{5}$	$\frac{l}{6}$

また、4 倍音 C6 と 5 倍音 E6 の周波数比は、$\frac{E6}{C6}=\frac{5}{4}$ で、長 3 度の音程という。C6 の開放弦長を$l6(=\frac{l}{4})$ とすれば、E6 は弦長 $\frac{4}{5}l6$（5 の倍数系列）として弾

く音と同じになる。これらの周波数比を、弦長で表せば、表2の下段となる。これらの倍音系列の音を、C4 ～ C5のオクターブ内に対応する音に埋め込めば(G5は長さを2倍にして1オクターブ下げてC4～C5内に入るように調整する)、C4、E4、G4、C5の周波数比が決まる。倍音系列に基づく音階は、長3度(E4:$\frac{5}{4}$)と完全5度(G4:$\frac{3}{2}$)が調和音となるような音階となる。この音階は、純正律(Just intonation)と呼ばれ、後で論ずる。ヴァイオリン系楽器では、この純正律の音律で演奏する。

表3. ピアノのオクターブトーン

B3	C4	‖	D	‖	E	F	‖	G	‖	A	‖	B	C5	‖	D

ピアノの鍵盤として、C4音を中心に音階を示せば、表3となる。表3において、ピアノのC4とD4の間にある黒鍵盤は、C4の右隣りにある「‖」で代用し、半音のキィを表わす。D4以降の表記も同様とする。C4の半音上がった音階をC4♯と表し、D4の半音下がった音階をD4♭と表す。このC4♯とD4♭は、周波数が音楽的には違う音であるが、ピアノでは、同じ周波数の音として1つのキィに割り振り演奏する。西欧近代音楽のピアノでは、1度のチューニングで転調の保証をするために、半音周波数比を一定にし、♯=♭とするために、平均律というチューニングを使用する。平均律は、半音を含む、C4, C♯, D, D♯, E, F, F♯, G, G♯, A, A♯, B, (C5) の12音階で成り立っている。半音比は一定なので、全音比も一定となり、半音は全音の完全に半分となる。調和を基本とする純正律では、全音比は2種類あり、大全音と小全音がある。半音は全音の半分ではなく、♯と♭の比は違う。このことが、純正律の音階では、1度のチューニングによる転調を不可能にし、音階が、どの音名からチューニングするかに根元的に関係する。これが、本報告の主題である。

この報告は、300年前に完成形となった現代西欧ヴァイオリン系楽器の調和律(純正律)による調弦が、歴史上の到達点であるという観点と、ピタゴラス律、調和律、平均律それぞれの音律の音楽的変遷を照らし合わせるという方法で、現代ヴァイオリン系楽器をA音からチューニングする根拠について、納得できる理解を与えることを目的とする。チューニングする音律と楽器は密接に関連することに注目する。ピアノは、平均律の音階を採用しており、同様に、ギターのフレット間隔も平均律で調整されており、両楽器とも転調(コード変換)が保証されている。次に、平均律について説明する。

平均律とピタゴラス音律の解析

平均律は、1585年にシモン・ステヴィンが1オクターブの中に存在する「半音」をすべて同等な比:$\sqrt[12]{2}$で算出する平均律(Mean temperament)を西欧世界で初めて導出した[1)]。1オクターブを周波数比2として、半音比:$\sqrt[12]{2}\approx1.059463094$ を一定値として音階を構成する(表4)。♯(半音あげる)、♭(半音下げる)は、同音となる。平均律では、オクターブ以外は協和音となり得る音程は存在しないが、表4に見るように、1度のチューニングで転調が保証される。5度音程の平均律と調和音の差は、Martin D18ギターの弦長で0.5 mmである。

表4. 平均律

		C調	A調
1	1.0	C	A
2	$\sqrt[12]{2}\approx1.0595$	C ♯	A ♯
3	$(\sqrt[12]{2})^2\approx1.1225$	D	B
4	$(\sqrt[12]{2})^3\approx1.1892$	D ♯	C
5	$(\sqrt[12]{2})^4\approx1.2599$	E	C ♯
6	$(\sqrt[12]{2})^5\approx1.3348$	F	D
7	$(\sqrt[12]{2})^6\approx1.4142$	F ♯	D ♯
8	$(\sqrt[12]{2})^7\approx1.4983$	G	E
9	$(\sqrt[12]{2})^8\approx1.5874$	G ♯	F
10	$(\sqrt[12]{2})^9\approx1.6818$	A	F ♯
11	$(\sqrt[12]{2})^{10}\approx1.7818$	A ♯	G
12	$(\sqrt[12]{2})^{11}\approx1.8877$	B	G ♯
13	$(\sqrt[12]{2})^{12}=2.0$	C	A

平均律から約2000年さかのぼり、ピタゴラスが、第3倍音の完全5度の音程を持つ周波数比で$\frac{3}{2}$となる関係(開放弦長の半分がオクターブ、開放弦長の$\frac{2}{3}$が完全5度)だけを使って、ピタゴラスの音律を作っている。例えば、C調のドから音階を作るとすれば、C(ド)が周波数1とすると、C・$\frac{3}{2}$=1.5(Cの弦長を$\frac{2}{3}$にすること)は、完全5度上のGの周波数になる。平均律の表4と比べると、G(ソ)は、8番目の音:$(\sqrt[12]{2})^7\approx\frac{3}{2}$に対応する。さらに、このGに対して完全5度上の音は、$(\frac{3}{2})^2=2.25$となり、Cの1オクターブ上の音域のD(レ)となるので、同じ音域に収めるために、オクターブ下げて、$(\frac{3}{2})^2\ (\frac{1}{2})=1.125$とする。このように、完全5度$(\frac{3}{2})$とオクターブ下げ$(\frac{1}{2})$の関係だけで音階を作っていくピタゴラス律では、Cから始めて繰り返す3番目の音に、D(レ)が対応する(表5)。Cから順に、C、G、Dと、D以降も完全5度の関係を芋づる式に12回繰り返すと、表5の順のように、13番目の音として、1オクターブ上のCが出てくる。ちょうど、13番目の音が、1オクターブ比の2に近いので、ここで12音階を打ち切ったのである[2)]。

$$2.0273 \approx (\tfrac{3}{2})^{12}\ \ (\tfrac{1}{2})^{6} \approx 2$$

しかし、この 2 と 2.0.73 の比率の差（ピタゴラスのコンマという）が、正確に音階を閉じないために、転調できない等の弊害を生む。C から始めるピタゴラス音律では、FC の音程比は原理的に $\frac{3}{2}$ にならない。

ピタゴラス音律において、表 5 のように、C から始めて芋づる式に作る最初の 5 音：C、G、D、A、E だけで音階を打ち止めにしても楽曲は成立する。日本では俗に、この 5 音では、第 4（ヨん）音と第 7（ナな）音が抜けるので、「ヨナ抜き音階」と呼ばれるが、この 5 音階は、世界に共通する音階の 1 つになっている。「赤とんぼ（中山晋平作曲）」、スコットランド民謡に基づく「蛍の光」、「アメイジング・グレイス」、ドヴォルザークの第 2 楽章主部：新世界より「遠き山に日は落ちて（日本）」など多くの曲がこの 5 音階を用いて作曲されている。

表 5.　ピタゴラス律

		C 調
1	1.0	C
2	$(\frac{3}{2}) = 1.5$	G
3	$(\frac{3}{2})^2(\frac{1}{2}) = \frac{9}{8} = 1.125$	D
4	$(\frac{3}{2})^3(\frac{1}{2}) = \frac{27}{16} = 1.6875$	A
5	$(\frac{3}{2})^4(\frac{1}{2})^2 = \frac{81}{64} = 1.265625$	E
6	$(\frac{3}{2})^5(\frac{1}{2})^2 = \frac{243}{128} = 1.8984375$	B
7	$(\frac{3}{2})^6(\frac{1}{2})^3 = \frac{729}{512} = 1.423828125$	F ♯
8	$(\frac{3}{2})^7(\frac{1}{2})^4 = \frac{2187}{2048} = 1.067871093$	C ♯
9	$(\frac{3}{2})^8(\frac{1}{2})^4 = \frac{6561}{4096} = 1.60180664$	G ♯
10	$(\frac{3}{2})^9(\frac{1}{2})^5 = \frac{19683}{16384} = 1.20135498$	D ♯
11	$(\frac{3}{2})^{10}(\frac{1}{2})^5 = \frac{59049}{32768} = 1.80203247$	A ♯
12	$(\frac{3}{2})^{11}(\frac{1}{2})^6 = \frac{177147}{131072} = 1.35152435$	F
13	$(\frac{3}{2})^{12}(\frac{1}{2})^6 = \frac{531441}{262144} = 2.02728653$	C

表 5 によれば、芋づる式に完全 5 度（$\frac{3}{2}$）の関係から、E の次に 6 番目「B」、7 番目「F ♯」が出てくる。この、C, D, E, F ♯ , G, A, B の音階は実は、G, A, B, C, D, E, F ♯ , (G) のト長調（長音階）の音階になっている。これを、C 音から見た場合には、7 番目の音階「F ♯」の音程 $\frac{729}{512} \approx 1.4238$ が、他の 6 音と比べ、純正音程からずれるので、次の、

G, A, B, C　, D, E, F ♯ ,（G）：ト長調
C, D, E, F ♯ , G, A, B　,（C）
C, D, E, F　, G, A, B　,（C）

による対応のように、ハ長調の始めの C 音から 4 度上、オクターブ上からは 5 度下の F($2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \approx 1.3333$) で、F ♯を置き換える。元のト長調の GC 間は、完全 4 度 $\frac{4}{3} \approx 1.3333$ になっている。それに合わせ、この 7 音階：C, D, E, F, G, A, B, (C) として一部再構成した音律によって、単旋律のグレゴリオ聖歌（9 〜 10 世紀）や中世の音楽は作曲されたとされることがある。C から始めたピタゴラス音律の本来の F は、表 5 の 12 番目に、$\frac{177147}{131072} \approx 1.3515$ として出てくる。表 5 の F を再構成した 7 音で並び替えると、表 6 となる。この表 6 で、オクターブ上の C は、周波数比 2 としてしまい、ピタゴラスのコンマのつけを F に押し付け 7 音とする。これが、ピタゴラス 7 音階の正体である。この表 6 の 7 音階は、音程完全 5 度 $\frac{3}{2}$ を基に音階を作っているので、CG 間は音程 $\frac{3}{2}$ 、DA 間も $\frac{27}{16} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2}$ と正しい音程となっている。

このＣから始まる：

C,D,E,F,G,A,B, (C)

の自然長音階 C（ハ）長調の音列は、そのまま、A から始まる：

A,B,C,D,E,F,G, (A)

の自然短音階 A（イ）短調の音階になっている。実は、グレゴリオ聖歌（9 〜 10 世紀）など中世の音楽は、この 7 音の C（ハ）長調ではなく、基音を A とした A(イ)短調の音階で作られている。この基音が C(ハ)ではなく、A(イ)短調の音階であることが、A からヴァイオリンのチューニングを始める理由を考える上で、「1 つの着眼点」（着眼点 1）である。A 短調から、感じのよい C 長調へは、始めの音を変えれば良いだけなので、すぐ行き着く [3]。

表 6.　再構成したピタゴラス律（音階）

		C 長調	A 短調	
1	1	C	A	1
2	$\frac{9}{8}$	D	B	$\frac{9}{8}$
3	$\frac{81}{64}$	E	C	$\frac{32}{27}$
4	$\frac{4}{3}$	F	D	$\frac{4}{3}$
5	$\frac{3}{2}$	G	E	$\frac{3}{2}$
6	$\frac{27}{16}$	A	F	$\frac{128}{81}$
7	$\frac{243}{128}$	B	G	$\frac{16}{9}$
8	2	C	A	2

結果と討論

和音の解析

全音（例えば CD 間）は、半音が 2 つ分（半音は全音の半分ではない）の音程、全音と全音で長 3 度（例えば CE 間）の音程、全音と半音で短 3 度（例えば AC 間）の音程となる。このとき、長 3 度と短 3 度で長 3 和音（例えば CEG 間）、短 3 度と長 3 度で短 3 和音（例えば ACE 間）となる。根音（基音）からの主和音が長 3 和音の音階が長調（長音階例えば C 長調）で、一方、根音からの主和音が短和音の音階が短調（短音階例えば A 短調）と呼ばれる。したがい、長音階例えば C 長調は、

C（全音）D（全）E（半）F（全）G（全）A（全）B（半）C、

短音階例えば A 短調は、

A (全音) B (半) C (全) D (全) E (半) F (全) G (全) A となる。

ピタゴラス音律では、完全5度（長3度と短3度）を、単純な周波数比 $\frac{3}{2}$ として音階を作る。この完全5度の音程のある2音（例えば基音Aと5度上E）の開放弦を同程度の強さで弾くと、開放弦よりは弱い響きだが、両者の振動数の差に相当する音程（「差音」）として、1オクターブ下の基音Aの音が聞こえてくる。Aの周波数をfとして、

$$\text{(0.1)}\qquad E-A=\frac{3}{2}f-\frac{2}{2}f=\frac{1}{2}f$$

（Aの1オクターブ下の差音）

となる。この2音:EとAがピッタリ合っていないと、ずれの周波数に相当するうなり（beat）を生じ、「ワンワンワン」という響きが聞こえる。この完全5度調弦が、ピタリと合えば（基音Aに基づきEをチューニングできれば）、式（0.1）から、基音Aを、さらに1オクターブ下の基音A音が支えて、ヴァイオリンの楽器全体が、「裏板から良く鳴る」ようになる。これが「和音」の本質である[4]。A(sin(x)) と5度上E(sin(1.5x)) の2音の差音 (sin(1.5x)−sin(x))：E−A を表わすと、この差音の波形は、A音の1オクターブ下の周期波形（元のAの波長の2倍：周波数は $\frac{1}{2}$ ）になる。

純正律の解析

音の周波数比が単純な数比であると、調和音を生む。完全5度の音程を持つ2和音は、基音（根音）の1オクターブ下の差音低音がしっかりと響き全体を支え、充実した「協和音」を作り出す。これが、西欧近代音楽の和音、いわゆる調和音（harmony）の本質である。

楽曲が、グレゴリオ聖歌のような、単旋律のモノフォニーから、多声部合唱（ポリフォニー：15～16世紀）に移行するにしたがい、長3度（例えばCE間）のピタゴラス音律の周波数比：$\frac{81}{64}\approx 1.2656$ を単純な数比：$\frac{5}{4}=1.25$ に置き換え、調和音（harmony）に重きをおく音階に再構成されるようになる[3]。これに基づく音階を、純正律と呼ぶ。この再構成により、純正律の長3度は、ピタゴラス音律に比べ、音程はかなり狭くなり、この差をシントニック・コンマと言う。周波数比 $\frac{5}{4}$ は、4倍音（C6）と5倍音（E6）との周波数比に相当し、C4開放弦長の $\frac{4}{5}$ 弦長が、純正律の長3度音程E4の弦長に当たる。

長3度（例えばCとE）の音程の周波数比を $\frac{5}{4}$ とすると、2音の差音は、Cの周波数をfとすれば、

$$\text{(0.2)}\qquad E-C=\frac{5}{4}f-\frac{4}{4}f=\frac{1}{4}f$$

（Aの2オクターブ下の差音）

となり、完全5度の2音の時の1オクターブ下の基音よりさらに1オクターブ下の、基音の2オクターブ下の低音差音が基音を支え、長3度の和音は、さらにもっと良く響く充実した協和音が得られる。C (sin(x)) と長3度上E (sin(1.25x)) の2音の差音 (sin(1.25x)−sin(x))：E−C を表わすと、この差音の波形は、C音の2オクターブ下の周期波形（元のCの波長の4倍、周波数は $\frac{1}{4}$ ）になる。

あわせて単純な周波数の比ゆえに、その差音（Combination tone）が、基音のオクターブ下の低音差音となり、基音の響き全体を支え、良く響く充実した「協和音」が得られる。この純正律と差音のメカニズム：これが西欧近代音楽の3和音（調和音）の本質である。3和音（例えばC, E, G）の差音も、長3度の2和音（C, E）と同様に、基音（根音）：fの2オクターブ下：$\frac{f}{4}$ の周期波形となる。

ここで、和音の本質である、ド（C4:f）とソ（G4: $\frac{3f}{2}$ ）の1オクターブ下の差音（ $\frac{f}{2}$ ）と、ドの第3倍音（G5:1オクターブ上＋完全5度上）との関係、または、ド（C4：f）とミ（E4：$\frac{5f}{4}$ ）の2オクターブ下の差音（ $\frac{f}{4}$ ）と、ドの第5倍音（E6：2オクターブ上＋長3度上）との関係について説明する。

まず、ド（C4開放弦）とソ（G4開放弦）の完全5度の和音では、基音C4と基音G4に対して、それぞれ表7の倍音系列をとり、C4に対しては第3倍音、G4に対しては第2倍音に当たる：G5の共有倍音同志が協和する（うならない）。C4とG4の完全5度を持つ2弦のチューニングが、途上で未完の時は、このG5の共有倍音同志がうなるわけである。チューニング完成時には、差音として、基音C4の1オクターブ下のC3が協和音として鳴る。これはちょうど、表7下段のように、協和音である差音C3を基音と考えたときの、第2、第3倍音が、C4、G4となるような関係になるのである。

このとき、基音C4に対して、同じ開放弦1音に対し、振幅を $\frac{1}{3}$ にした3倍音：G5を加えた、次に示す合成音（z）：

$$\text{(0.3)}\qquad z=C4-\frac{1}{3}G5=\cos(t)-\left(\frac{1}{3}\right)\cos 3t$$

の周期は、基音と同じC4の矩形波形の音色になる。

次に、ド（C4）とミ（E4）の長3度の2和音について解析する。基音C4に対しては、倍音が1,2,3,4,5,6倍音に対して、C4,C5,G5,C6,E6,G6の音名に対応す

表7．2和音（G/C）の純正律倍音系列

	C4		C5	G5	C6		
		G4		G5		D6	G6
C3	C4	G4	C5				

る。基音E4についても同様に、表8のような、それぞれの倍音系列を取り、E6（C4については第5倍音、E4については第4倍音）の共有倍音同志が協和する（うならない）。C4とE4の長3度を持つ2弦の、チューニングが途上で未完の時は、このE6の共有倍音同志がうなるわけである（平均律のピアノの調律は、このうなりを利用して純正律からずらす）。完全5度の場合の協和倍音G5（C4の3倍音）よりも、長3度では、より高次のE6（C4の5倍音）の倍音同志が協和する。チューニング完成時は、差音として、基音C4の2オクターブ下のC2が協和音として鳴る。これはちょうど、G/C和音の表7下段の時と同様に、協和音である差音C2を基音と考えたときの、第4、第5倍音が、C4、E4となるような関係になるのである（表8）。

この時、基音C4の開放弦に対して、振幅の小さい$\frac{1}{3}$3倍音（G5）と$\frac{1}{5}$5倍音（E6）を加えた合成音（z）：

$$(0.4)\qquad z = \mathrm{C4} - \tfrac{1}{3}\mathrm{G5} + \tfrac{1}{5}\,\mathrm{E6} = \cos(t) - (\tfrac{1}{3})\cos 3t + (\tfrac{1}{5})\cos 5t$$

の周期は、C4の周期と同じになる。この倍音の重ね合わせが、楽器の音色の正体である。C4の弦を弾けば、各倍音が開放弦より弱い響き（小さい振幅）であるが固有振動として混ざり、その構成比が音色の違いとして聞こえる。たとえば、木管楽器の1種クラリネットの音の波形は、合成音：式（0.4）のいわゆる矩形波に近い波形であることが知られている。クラリネットは、ほぼ管体の太さが一定であり、さらに、閉管していることで奇数倍音だけが現れる。各々の倍音の量と発音のタイミング、長さ等の組み合わせによって、楽器特有の音色として表せる。

ドミソ（C4,E4,G4）の3和音は、差音として、基音（C4）の2オクターブ下のC2が協和音となる。これもちょうど、表7下段の（C3）の場合と同様に、協和音である差音C2を基音としたときの、第4、第5、第6倍音が、C4、E4、G4となるような関係になっているのである。

表8．2和音（E/C）の純正律倍音系列

			C4		C5		G5		C6	E6
				E4		E5		B5		E6
C2	C3	G3	C4	E4						

C調系とA調系の解析

C長調系列の表9で、音名間の数字は、音名間の周波数比を表わす。ピタゴラス音律では、C系においてDE間の全音比は、$\frac{9}{8}$となる。EF、BC間は半音で、他は全音となっている。表9右欄のように、長3度（周波数比が$\frac{5}{4}$）の調和音を考えたC系列の純正律を作る。その手順を示す。

(1)ピタゴラス音律の音階を、Cから芋づる式に完全5度（$\frac{3}{2}$）の関係で7音作る。オクターブ上のCは周波数比2とする。

(2)第7番目にできるF♯を、オクターブ上のCから5度下（$\frac{3}{2}$）のF（周波数比では$\frac{4}{3}$）に置き換えて、7番目で打ち切り7音を再構成し、広い意味でのピタゴラス音律とする。

(3)Cから始めて、主要3和音の根音：C、F、Gに対して長3度の音：それぞれ、

E（C→E）、A（F→A）、B（G→B）

を周波数比$\frac{5}{4}$に再構成する。この再構成により、ピタゴラス音律から純正律へ、次のようになる（表9）。

E：$\frac{81}{64} \rightarrow \frac{5}{4}$
A：$\frac{27}{16} \rightarrow \frac{5}{3}$
B：$\frac{243}{128} \rightarrow \frac{15}{8}$

表9．C調系のオクターブ

	ピタゴラス律	比	純正律	比
C	1		1	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$
D	$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$
E	$\frac{81}{64}$		$\frac{5}{4}$	
		$\frac{256}{243}$		$\frac{16}{15}$
F	$\frac{4}{3}$		$\frac{4}{3}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$
G	$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$
A	$\frac{27}{16}$		$\frac{5}{3}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$
B	$\frac{243}{128}$		$\frac{15}{8}$	
		$\frac{256}{243}$		$\frac{16}{15}$
(C)	2		2	

この(3)の純正律による再構成により、ピタゴラス音律では全音比がすべて同じ比率$\frac{9}{8}$、半音比も同じ$\frac{256}{243}$であったが、純正律では、CD間の比$\frac{9}{8}$のような「大全音」と、DE間の比$\frac{10}{9}$のような「小全音」の2種類に全音が分かれてしまう。純正律の半音は、ピ

タゴラス音律の比 $\frac{256}{243}$ から比 $\frac{16}{15}$ となり、「全音階的半音」という。

この純正律で、全音が2種類できてしまうことが、転調を保証しないばかりか、音程に関して重大な問題を引き起こす。この影響で、Cから始めたピタゴラス音律では、CG間、DA間、EB間、FC間すべてにおいて完全5度比（$\frac{3}{2}$）の音程になっているが、純正律では、このうち、DA間だけ、完全5度音程：$\frac{3}{2}$ とならない。

(0.5)　DA 間 $= \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{27} \approx 1.4815 \neq \frac{3}{2}$

これは、純正律では、

長3度＝大全音＋小全音
短3度＝大全音＋全音階的半音
完全5度＝長3度＋短3度＝大全音＋小全音＋大全音＋全音階的半音

とならねばならないが、Cから始めたC系列の純正律のDA間の比だけは、

DA間＝大全音＋小全音＋「小全音（DE間の違い）」＋全音階的半音

となってしまうために、完全5度：$\frac{3}{2}$となならない。A音から楽器をチューニングする理由を考える上で、この点に注目する。

ここで次に、表9のC系列を、グレゴリオ聖歌の音階に習い（着眼点1）、Aを基音として、Aから始まるA系列に作り直してみる。ピタゴラス音律部分はC系列の場合と全く変わらず、C系列の手順(3)に相当するA系列の純正律部分は、表10の右欄のように変わる。

表10. A調系のオクターブ

	ピタゴラス律	比	純正律	比
C	$\frac{16}{27}$		$\frac{3}{5}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$
D	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$
E	$\frac{3}{4}$		$\frac{3}{4}$	
		$\frac{256}{243}$		$\frac{16}{15}$
F	$\frac{64}{81}$		$\frac{4}{5}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$
G	$\frac{8}{9}$		$\frac{9}{10}$	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$
A	1		1	
		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$
B	$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$	
		$\frac{256}{243}$		$\frac{16}{15}$
(C)	$\frac{32}{27}$		$\frac{6}{5}$	

表10において、表示上はC系列の表9と同じ並びにするが、Aから始めて、主要3和音の根音、A、D、Eに対して短3度（A短調）の音程として、

C（A→C）、F（D→F）、G（E→G）

を周波数比 $\frac{6}{5}$ に再構成する。この再構成により、ピタゴラス音律から純正律へ、次のようになる（表10）。

C：$\frac{32}{27} \rightarrow \frac{6}{5}$
F：$\frac{64}{81} \rightarrow \frac{4}{5}$
G：$\frac{8}{9} \rightarrow \frac{9}{10}$

となる。これにつれ、1オクターブ下のCも、

C：$\frac{16}{27} \rightarrow \frac{3}{5}$

となる。短3度は、「全音階的半音＋大全音」で、周波数比は、$\frac{16}{15} \cdot \frac{9}{8} = \frac{6}{5}$ となる。A系列純正律の再構成により、C系列と同様に、「大全音 $\frac{9}{8}$」と、「小全音 $\frac{10}{9}$」に分かれるが、

C系列で、CD間：大全音＝$\frac{9}{8}$
C系列で、DE間：小全音＝$\frac{10}{9}$

であったものが、Aから始まる、

A系列で、CD間：小全音＝$\frac{10}{9}$
A系列で、DE間：大全音＝$\frac{9}{8}$

と、同じ2音間の音程でありながら変更される。純正律は、1つのチューニングで転調ができないわけである。

このとき、変更によって、Aから始めた純正律では、1オクターブ内に収まる：

CG間、DA間、EB間、FC間すべてが完全5度になり、Cから始めた純正律では、

DA間≠$\frac{3}{2}$（完全5度でない）

であったものが、A系列では純正律においても、完全5度となる。この点が、チューニングをA音から始める理由を考える上での「着眼点2」となる。

ヴァイオリン系楽器の調弦

ストラディバリウス等に代表されるヴァイオリンは、純正律が確立していた中世と同時期：17世紀後半から18世紀に完成形を見た。ヴァイオリンは、音が高い方から、1、2、3、4弦と言い、高い第1弦から順に、E、A、D、Gの音に、第2弦のA音のピッチを基準に、すべて完全5度の音程を基本に、A（2弦）、D（3弦）、G（4弦）、E（1弦）の弦の順にチューニングする。チューニング手順は以下になる（表11）。

(1) まず、2弦をA4のピッチ：通常は440 Hzに合わせる。
(2) 3弦：D4が、2弦：A4を基準に、完全5度「下」になるように、差音である基音D4の1オクターブ下の音が弱く響くようにチューニングする。

表11. ヴァイオリンの調律

St.	Violin		T	u	n	e
1H	E5：A4×$(\frac{3}{2})$	5UP				4
2	A4：440Hz		1			
3	D4：A4×$(\frac{2}{3})$	5DWN		2		
4L	G3：A4×$(\frac{2}{3})^2$	5DWN			3	

⑶4弦：G3が、3弦：D4を基準に、完全5度「下」になるように、差音である基音G3の1オクターブ下の音が弱く響くようにチューニングする。

⑷1弦：E5が、2弦：A4を基準に、完全5度「上」になるように、差音に注意してチューニングする。

ヴァイオリンには、フレットがないので、演奏者が耳により、弦を押さえる位置を指位置で調節して、純正律で弾く。ピアノとギターは、平均律でチューニングするので、転調が保証される。ギターのフレットは、弦長が、平均律になるように、純正律からずらして切ってある。ピアノの鍵盤では同音となるが、ヴァイオリンなどの純正律では、C♯とB♭は別の音で、指位置で弾き別ける。

少し大きめのビオラは、4弦を持ち、楽曲の低音域をカバーするために、ヴァイオリン同様に完全5度の音程を基本に、ヴァイオリンの基準ピッチとする第2弦:A4（440 Hz）を、ビオラの高い方の第1弦:A4として、すべて低くなる2、3、4弦を、順に完全5度下になるように、2弦：D4、3弦：G3、4弦：C3としてチューニングする。

やや大きめのチェロは、4弦を持ち、さらにビオラの1オクターブ下の低音域をカバーするために、ヴァイオリンの第2弦の基準ピッチA4＝440 Hzの1オクターブ下のA3＝220 Hzを、高い方の第1弦：A3として、ビオラと同様にすべて低くなる2、3、4弦を、順に完全5度下になるように、2弦:D3、3弦:G2、4弦:C2とチューニングする。これら、ビオラ、チェロの各弦の音域を整理すると、表12となる。表12の左端は、比較のために、ヴァイオリンの4弦の音域を示す。

300年前には完成形だった、ヴァイオリン。ビオラ、チェロは、その調弦に純正律の歴史を残している。ヴァイオリンでは、2弦:A4ピッチを基準にして、完全5度の音程によって、低い側のAの下は、D、Gとして、高い側のAの上は、Eとしてチューニングしていることが分かる。先の表5に見るような、完全5度音程によるピタゴラス音階の作成過程は、Cから芋づる式に始まったのではなく、Aから始まり、下の低い方に、D、G、Cとつくり止まり、反転して、基準Aから上の高い方に、Eという順番に作られたとされる。まさにこれは、ヴァイオリン系楽器のチューニング手順と同一である。チューニング手順と、調弦音に、300年の音律の歴史が残っているのである。このことが、Aからヴァイオリン系楽器をチューニングする理由の「着眼点3」となる。これですべての3つの着眼点が整った。

表12. ヴィオラとチェロの調律

V.	St.	Viola	St.	Cello
1H				
2	1H	A4:440Hz		
3	2	D4:A4×$(\frac{2}{3})$		
			1H	A3:220Hz
4L	3	G3:A4×$(\frac{2}{3})^2$		
			2	D3:A3×$(\frac{2}{3})$
	4L	C3:A4×$(\frac{2}{3})^3$		
			3	G2:A3×$(\frac{2}{3})^2$
			4L	C2:A3×$(\frac{2}{3})^3$

一方、コントラバスは、その楽器の完成形が、ヴァイオリン系楽器に比べかなり遅く、19世紀になってほぼ固まり、ヴァイオリン系楽器とは異なり、高い方から1、2、2、4弦とし、第1弦をチェロの3弦：G2と同音にして、1弦：G2、2弦：D2、3弦：A1、4弦：E1と、完全5度音程ではなく、すべて4度音程で調弦する。

ここで、コントラバスの調弦を、4度音程調弦に、ヴァイオリン系と変えた理由として、次のことが考えられている。チェロに比べかなりサイズの大きいコントラバスは、チェロの音域より1オクターブ下の音域をカバーする、高い1弦：A2から5度音程の4本調弦の構成が考えられていたが、サイズが大きくなるために、弦の音程を取る指幅が大きくなり演奏できない。できたとしても、当時はガット（羊の腸でできている）弦しかなく、それで一番低い4弦:C1弦を作ろうとすると、人間の親指より太くなってしまうので、C1弦を作ることができなかった。そこで、最低弦の音をG1、完全5度ずつ上がって、D2、A2としたチューニングの3弦コントラバスの歴史が始まった。その後、18世紀から徐々に巻線弦が発明され、ガット弦またはナイロン弦に金属線を巻き付け補強して弦径を細くできるようになり、しだいに、高い方の1弦をG2（チェロの3弦）から始める4度音程の、全体音域を狭めた、4弦コントラバスに変わった。さらに巻線の開発を加え、完全5度チューニングに最適な弦を求めて、ジャズ・ベーシストのレッド・ミッチェル（Red Mitchell：1927-1992）は、この歴史をふまえ、あえてチェロより1オクターブ音域を下げて完全5度調弦した、初期目標の4本弦:

高い方から 1 弦 : A2、D2、G1、C1 で、コントラバスをチューニングして演奏した [5]。したがって、弦楽器の調弦の基本は、完全 5 度チューニングのヴァイオリン系に代表されると考えてよい。

今ここで、ヴァイオリン系楽器の調弦に、300 年前の純正律の音律と音階の名残が残る、すなわち、調弦は音律そのものを反映したものと考える（着眼点 3)。また、近代は長調が基本となり、C を基本に自然長音階を考えるが（音域表示も C を基準)、ヴァイオリンが完成形となった 300 年前の中世では、A 音から始まる自然短音階（短調）を基本にしていたことを思い出す（着眼点 1)。一方、表 9)（C 系列）と表 10（A 系列）によれば、C から始まるピタゴラス音律では、DA 間の音程は完全 5 度 : DA = $\frac{3}{2}$ であるが、C から始まる純正律では、オクターブ内の DA 間の音程が完全 5 度にならない : DA ≠ $\frac{3}{2}$ 。A から始まる自然短音階のオクターブ内にある DA 間の音程は、A から始まるピタゴラス音律でも、A から始まる純正律でも、DA 間の音程は完全 5 度になる（表 15)。現に、ヴァイオリン、ビオラ、チェロでも現れる、オクターブ内の D 弦と A 弦間（DA 間音程）は、完全 5 度音程でチューニングするので、C 系で始まる自然長音階の純正律を反映した楽器の調弦ではあり得ない。A 系から始まる自然短音階の純正律でなければならないし、現に調弦は、A ピッチを基準にして、A から始めて、他 3 本をチューニングしていく（着眼点 2)。

表 15. C 調と A 調における DA 間音程

	ピタゴラス音律	純正律
C 調	DA$=\frac{3}{2}$	DA$\neq\frac{3}{2}$
A 調	DA$=\frac{3}{2}$	DA$=\frac{3}{2}$

ここまで、理解した上で、ピタゴラス音律の音階を、完全 5 度音程 $\frac{3}{2}$ で、C から始めて芋づる式に導出した表 5 を再考する。実は、この表は、C から高音側に始めるのではなく、A を始めとして、A から低音側に 3 つ、$(\frac{2}{3})$、$(\frac{2}{3})^2$、$(\frac{2}{3})^3$ として、D、G、C を作り、一転戻って、A から高音側に 1 つ、$(\frac{2}{3})$ して、E を作る手順と見る。すると、C から高い方へ合計、C、G、D、A、E の 5 音（ヨナ抜き音階）が定まる（表 16)。実際に、ピタゴラスの音階は、このような手順で作られたと言われる。

また、純正律から見ても、この表 16 の音階は、A 系から始めるので、表 10 のように、オクターブ内の DA 間の音程は、完全 5 度音程 : DA = $\frac{3}{2}$ が保証される。C から始めた純正律と見れば、オクターブ内の DA 間音程は完全 5 度にならず : DA= $\frac{20}{27}\neq\frac{3}{2}$ 、表 16 とは異なる数値になる。表 16 は、ピタゴラス音律としては、見た目は、C から始めても、A から始めても同じになるが、オクターブ内の DA 音程が完全 5 度である要請から、C からではなく、A から始まる純正律が選ばれる。

表 16. A 調に対するピタゴラス音律

		A 調
4	$(\frac{2}{3})^3\cdot 2=\frac{16}{27}$	C
3	$(\frac{2}{3})^2\cdot 2=\frac{8}{9}$	G
2	$(\frac{2}{3})$	D
1	1.0	A
5	$(\frac{3}{2})$	E

この表 16 で、A から始めて、低音に 2 つ、高音に 1 つ音階を取れば（4 弦)、高音から、E,A,D,G となり、まさにこれが、ヴァイオリンの調弦音とチューニング手順そのものになる。また、A から始めて、すべて低音側に 3 つとれば(4 弦)、高音から、A,D,G,C となる。これはまさにビオラの調弦方法となる。A から始める純正律の自然短音階の 300 年の歴史が、完全 5 度調弦（低い方から G,D,A,E）のヴァイオリン系の調弦として、その名残りが残っている。逆に言うと、300 年前に完成形となったヴァイオリンは、A から始まる純正律そのものに、楽器をチューニングしているわけである。したがって、まず、道理として、A 音のピッチを合わせるのである。

また、表板には、ネックに平行な柾目の板を使う。木目間隔も揃っている方が良い。表板を伝わる振動速度は、木目に平行な速さが、垂直方向に比べほぼ 2 倍である。したがって、振動が周辺まで同時に伝わるには、表板の長さの比が、2 : 1 がよい。製造する過程で、経験的に探り出した、表板の形状に対する結論であったと考えられている [6]。

まとめ

17 世紀から 18 世紀に完成したヴァイオリン系楽器は、当時の、DA 間音程が完全 5 度となる、A から始まる純正律の自然短音階を正確に反映し、その名残りを現在も、各調弦音とそのチューニング手順に歴史を残している。したがって、A 音からピッチをチューニングする必然がある。ヴァイオリンを A 音からチューニングする根拠は、次の理由による。

ヴァイオリンのチューニング =
A をピッチとする純正律の自然短音階

謝辞

物理学実験 I「音速の測定」の発案者である、二階堂誠也教授（神奈川大学）には、退任後、わざわざ

大学まで来ていただいて、貴重なご意見をいただいた。ここに感謝いたします。

文献

1) 伊藤　乾（2010）物理の響き　こころのひびき♯♭ー音楽への認知的アプローチ　第16回新しい「協和構造」を出するーピタゴラスとメルセンヌの交錯. *科学* **80** (4). 岩波書店，東京.
2) 小方　厚（2007）*音律と音階の科学ブルーバックス*（B-1567）. 講談社，東京.
3) 大橋　力（2011）第22回音楽のなかの有限と無限(1) *科学* **81** (7). 岩波書店，東京.
4) 伊藤　乾（2010）物理の響き　こころのひびき♯♭ 第15回タルティーニと「響きの衝突」*科学* **80** (3). 岩波書店，東京.
5) Red Mitchell（1994）Cats of any color : jazz, black and white genelees「The return of red mitchell」. *Oxford Univ Pr (txt)* : 143-166. England.
6) チャールズ・テイラー（1998）佐竹　淳，林　大 訳 *音の不思議をさぐる*. 大月書店，東京都.